

공업수학-II

복소 해석(Complex Analysis)
(13-2 학기)

담당교수 : 김 동 욱

dwkim116@msn.com



강의 구성

13장 : 복소수와 복소함수

14장 : 복소 적분

15장 : 거듭제곱 급수와 테일러 급수



14장 복소 적분

(Complex Integration)



강의 범위

- 복소평면에서의 선적분
- Cauchy의 적분정리
- Cauchy의 적분공식
- 해석함수의 도함수

개요

■ 복소 적분의 중요성

□ 실질적 이유

- 실적분으로 접근이 곤란한 적분들을 복소적분에 의해 계산 가능

□ 이론적 이유

- 해석함수의 몇 가지 기본 성질들이 다른 방법들로 증명이 곤란

□ 특수함수들과의 물리적 응용에 연관되어 중요한 역할을 수행

- 특수함수 : 감마함수, 오차함수, 다양한 다항식 등

□ 관련 내용

- 복소 적분의 정의
- Cauchy의 적분정리
- Cauchy의 적분공식

14.1 복소평면에서의 선적분-1

■ 적분의 구분

- 정적분(definite integral)
- 부정적분(indefinite integral) : 원시함수(antiderivative)
 - 어떤 영역에서 도함수와 주어진 해석함수가 같은 함수
 - 미분공식들을 역으로 생각하여 많은 부정적분을 구함

■ 복소 정적분 : (복소) 선적분 (line integral)

$$\int_C f(z)dz$$

- 선적분 : $f(z)$ 를 주어진 곡선 또는 곡선의 일부를 따라 적분
 - $f(z)$: 피적분함수(integrand)
- 적분경로(path of integration) : C
 - 복소평면 내의 적분되는 곡선 : $z(t) = x(t) + jy(t), \quad (a \leq t \leq b)$
 - 양의 방향(positive sense) : C 에 대하여 t 가 증가하는 방향

14.1 복소평면에서의 선적분-2

■ 복소 정적분 : (복소) 선적분 (계속)

□ 적분경로(path of integration) : C (계속)

■ 예1 : $z(t) = t + j3t \quad (0 \leq t \leq 2)$

□ 선 $y = 3x$ 의 부분을 표시

■ 예2 : $z(t) = 4\cos t + j4\sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$

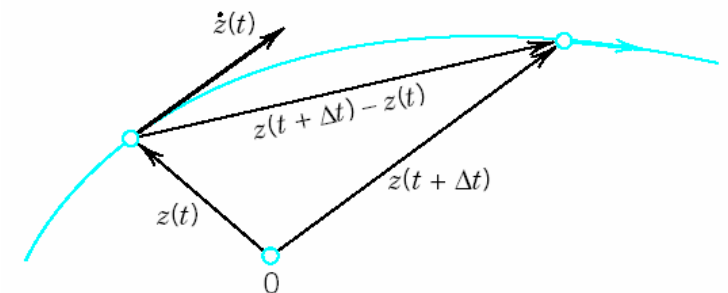
□ 원 $|z| = 4$ 를 표시

□ 매끄러운 곡선(smooth curve)

■ C가 모든 점에서 연속이고 0이 아닌 도함수를 갖는 곡선

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + j\dot{y}(t) \neq 0$$

$$\dot{z}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$



□ C가 어디서든지 연속적으로 변해가는 접선을 가지고 있음을 의미

14.1 복소평면에서의 선적분-3

■ 복소선적분의 정의

□ 전제조건

- C 가 $z(t) = x(t) + jy(t)$ 의 z 평면에서의 매끄러운 곡선
- $f(z)$ 가 C 의 각 점에서 정의된 연속함수

□ 분할(partition)

- 구간 $a \leq t \leq b$ 를 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 에서 점들을 분할

$$t_0 (= a), t_1, \dots, t_{n-1}, t_n (= b)$$

- 각 분할점에 C 의 분할점을 대응

$$z_j = z(t_j) \Rightarrow z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n (= Z)$$

- C 의 나누어진 각 부분에서의 임의의 점들을 선택 : ζ_m

- ζ_1 : z_0 와 z_1 사이의 점
- ζ_m : z_{m-1} 와 z_m 사이의 점

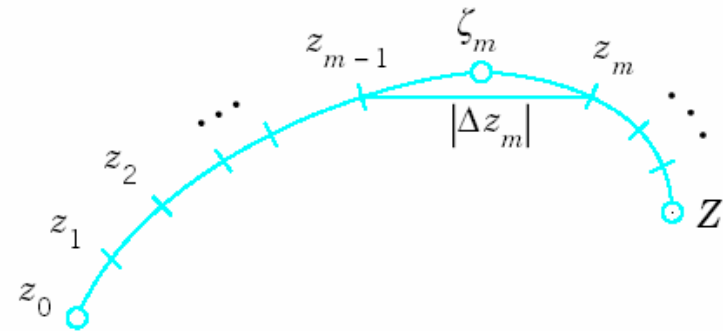
14.1 복소평면에서의 선적분-4

■ 복소선적분의 정의(계속)

□ 분할구간들의 합

$$S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m$$

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$$



□ 선적분(적분)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}| \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m = \int_{z_0}^{z_n} f(z) dz$$

- 복소수열 S_n 의 극한을 적분경로를 따르는 $f(z)$ 의 선적분이라 부름
- 만약 C 가 닫힌 경로(closed path)일 때
 - 닫힌 경로 : 끝점과 시작점이 일치하는 경로

$$\int_C f(z) dz, \quad \text{or} \quad \oint_C f(z) dz$$

14.1 복소평면에서의 선적분-5

■ 일반적 가정

- 모든 적분경로는 구분적으로 매끄러운 곡선으로 연결
 - 구분적으로 매끄러운 곡선 : **piecewise smooth curves**
- 끝과 끝이 연결된 유한개의 매끄러운 곡선으로 구성

■ 복소적분의 기본적인 속성들에 대한 정의

- 선형성(linearity)

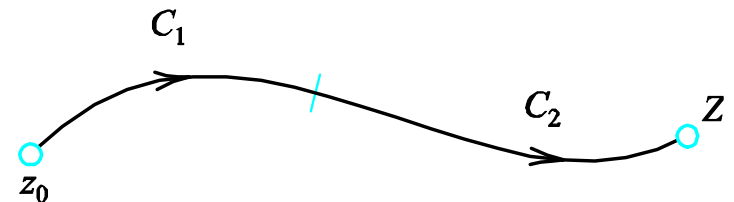
$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz$$

- 동일 경로상의 적분에서 방향의 뒤바뀜(sense reversal)

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz = - \int_Z^{z_0} f(z) dz$$

- 경로 분할(partitioning of path)

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$



14.1 복소평면에서의 선적분-6

■ 복소선적분의 존재

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad \text{let} \quad \begin{aligned} \zeta_m &= \xi_m + j\eta_m \\ \Delta z_m &= \Delta x_m + j\Delta y_m \end{aligned}$$

$$S_n = \sum f(\zeta_m) \Delta z_m = \sum (u + jv)(\Delta x_m + j\Delta y_m)$$

$$u = u(\xi_m + j\eta_m), \quad v = v(\xi_m + j\eta_m)$$

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + j \left[\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz = \int_C u dx - \int_C v dy + j \left[\int_C u dy + \int_C v dx \right]$$

□ f 가 연속이므로 u 와 v 도 연속

□ $f(z)$ 는 연속이고 C 가 구분적으로 매끄러운 곡선이라는 가정

➔ 선적분이 존재함을 의미

➔ 선적분의 값은 선을 나누는 방법과 사이점 ζ_m 의 선택에 무관

그리스문자

대문자	소문자	명칭		음가
A	α	alpha	알파	a, $\bar{a}$
B	β	bēta	베타	b
Γ	γ	gamma	감마	g
Δ	δ	delta	델타	d
E	ϵ	epsīlon	엡실론	e
Z	ζ	zēta	지타	z
H	η	ēta	이타	$\bar{e}$
Θ	θ	thēta	시타	th
I	ι	iōta	요타	i, $\bar{i}$
K	κ	kappa	카파	k
Λ	λ	lambda	람다	l
M	μ	m $\bar{y}$	뮤	m
N	ν	n $\bar{y}$	뉴	n
Ξ	ξ	ksī	크사이	ks
O	$\omicron$	omīkron	오미크론	o
Π	π	pī	파이	p
P	ρ	rhō	로	r
Σ	σ	sīgma	시그마	s
T	τ	tau	타우	t
Υ	υ	$\bar{y}$ sīlon	입실론	y, $\bar{y}$
Φ	ϕ	phī	파이	ph
X	χ	khī	카이	kh
Ψ	ψ	psī	프사이	ps
Ω	ω	ōmega	오메가	$\bar{o}$

14.1 복소평면에서의 선적분-7

■ 첫 번째 계산방법 : 부정적분과 상한/하한의 대체

- 미적분학에서 정적분을 계산하는 방법과 유사

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad F'(x) = f(x)$$

- 두 번째 방법보다 간단한 방법이나, 해석함수의 경우로 제한

- 공식화하기 위해 일반적으로 통용되는 개념이 필요

- 단순 닫힌 곡선(simple closed curve)

- 자신과 교차하지 않는 닫힌 곡선

- 단순 연결(simple connected)

- 단순 닫힌 곡선이 단지 집합에 속한 점들만 에워쌀 때

- 예 : 원판은 단순 연결

환형은 단순 연결되어 있지 않음

14.1 복소평면에서의 선적분-8

■ 첫 번째 계산방법 : 부정적분과 상한/하한의 대체(계속)

□ 정리 1 : 해석함수의 부정적분

■ $f(z)$: 단순연결 영역 D 내에서 해석적일 때

➤ D 내에 $F'(z) = f(z)$ 를 만족하는 해석함수 $F(z)$ 가 존재

➤ D 내의 두 점 z_0 와 z_1 을 연결하는 D 내의 모든 경로에 대해 다음 식이 성립

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

□ 예제1 $\int_0^{1+j} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+j} = \frac{1}{3} (1+j)^3 = -\frac{2}{3} + j\frac{2}{3}$

□ 예제2 $\int_{-j\pi}^{j\pi} \cos z dz = \sin z \Big|_{-j\pi}^{j\pi} = 2 \sin j\pi = j2 \sinh \pi = j23.097$

$$\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \quad \cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \quad \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

14.1 복소평면에서의 선적분-9

■ 첫 번째 계산방법 : 부정적분과 상한/하한의 대체(계속)

□ 예제3
$$\int_{8+j\pi}^{8-j3\pi} e^{z/2} dz = 2e^{z/2} \Big|_{8+j\pi}^{8-j3\pi} = 2(e^{4-j3\pi/2} - e^{4+j\pi/2})$$
$$= 2e^4(e^{-j3\pi/2} - e^{j\pi/2}) = 0 \quad \Leftarrow \quad e^{-j3\pi/2} = e^{j\pi/2}$$

□ 예제4
$$\int_{-j}^{+j} \frac{1}{z} dz = \text{Ln } z \Big|_{-j}^{+j} = \text{Ln } j - \text{Ln } (-j)$$
$$= \text{Ln } e^{j\frac{\pi}{2}} - \text{Ln } e^{-j\frac{\pi}{2}} = j\frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{2} = j\pi$$

14.1 복소평면에서의 선적분-10

■ 두 번째 계산방법 : 경로에 대한 표현식의 사용

□ 정리2 : 경로를 사용한 적분

- 해석 함수에만 제한되지 않고, 모든 연속인 복소함수에 적용
- C : 구분적으로 매끄러운 경로

$a \leq t \leq b$ 에서 $z = z(t)$ 에 의해 표시

- $f(z)$ 가 C 위에서 연속적인 함수이면

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)dt \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt} \right)$$

- 증명

$$z = x + iy \Rightarrow \dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}, \quad u[x(t), y(t)] = u, \quad v[x(t), y(t)] = v$$

$$dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)dt &= \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y})dt = \int_C [udx - vdy + i(udy + vdx)] \\ &= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx) = \int_C f(z)dz \end{aligned}$$

14.1 복소평면에서의 선적분-11

■ 두 번째 계산방법 : 경로에 대한 표현식의 사용(계속)

□ 정리2를 적용하는 과정

- (A) 경로 C 를 $z(t)$ 의 형태로 표시 : $a \leq t \leq b$
- (B) 도함수 $\dot{z}(t) = dz/dt$ 를 계산
- (C) $f(z)$ 의 모든 z 에 $z(t)$ 를 대입 : $x \rightarrow x(t)$, $y \rightarrow y(t)$
- (D) $f[z(t)] \dot{z}(t)$ 를 t 에 대해 a 에서 b 까지 적분

□ 예제5 : 단위원 주위에서 $1/z$ 의 적분

(A) $C: z(t) = \cos t + j \sin t = e^{jt}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(B) $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = -\sin t + j \cos t = j(\cos t + j \sin t) = je^{jt}$

(C) $f(z(t)) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{e^{jt}} = e^{-jt}$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = j2\pi$$

(D) $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} f[z(t)] \dot{z}(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-jt} je^{jt} = j2\pi$

14.1 복소평면에서의 선적분-12

■ 두 번째 계산방법 : 경로에 대한 표현식의 사용(계속)

□ 예제6 : 정수 거듭제곱 m 을 포함하는 z^m 의 적분

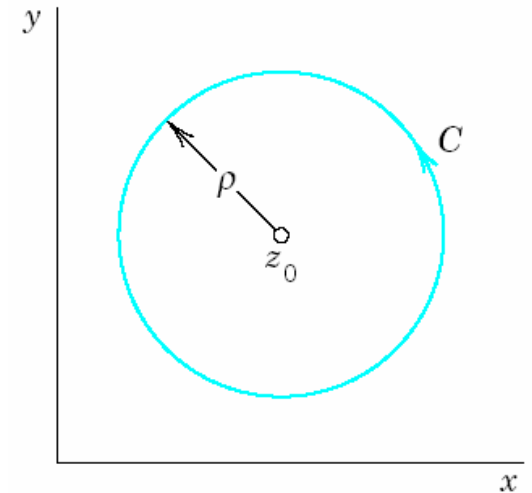
m 이 정수이고 z_0 가 상수일 때 $f(z) = (z - z_0)^m$ 이라고 하자. 반지름이 ρ 이고 중심이 z_0 인 원의 주위를 따라 반시계 방향으로 $f(z)$ 를 적분하여라.

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + j \sin t) = z_0 + \rho e^{jt}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{jmt}, \quad dz = j\rho e^{jt} dt$$

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = j\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{j(m+1)t} dt$$

$$= j\rho^{m+1} \left[\int_0^{2\pi} \cos(m+1)t dt + j \int_0^{2\pi} \sin(m+1)t dt \right]$$



$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} j2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ 및 정수}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = j2\pi$$

14.1 복소평면에서의 선적분-13

□ 경로 의존성

- 일반적으로 복소선적분은 경로의 양끝점에 의존할 뿐 아니라,
- 경로의 기하학적 형상에도 의존

□ 예제7 : 비해석 함수의 적분과 경로의 의존성

- $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ 를 0에서 $1+2i$ 까지 다음 경로를 따라 적분하라.

1. 경로 $C^* : z(t) = t + j2t \quad (0 \leq t \leq 1)$ 로 표현

$$\dot{z}(t) = 1 + 2i, \quad f[z(t)] = \operatorname{Re} z(t) = x(t) = t$$

$$\oint_{C^*} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1 + j2) dt = \frac{1}{2} t^2 (1 + j2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + j$$

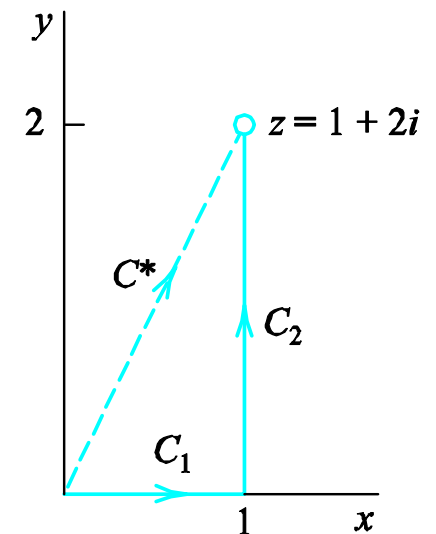
2. 경로 C_1 과 C_2

□ $C_1 : z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \dot{z}(t) = 1, \quad f(z(t)) = x(t) = t$

□ $C_2 : z(t) = 1 + jt \quad (0 \leq t \leq 2), \quad \dot{z}(t) = j, \quad f(z(t)) = x(t) = 1$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^2 1 \cdot j dt = \frac{1}{2} + j2$$

$\Rightarrow$ 적분 경로에 따라 적분값이 상이



14.1 복소평면에서의 선적분-14

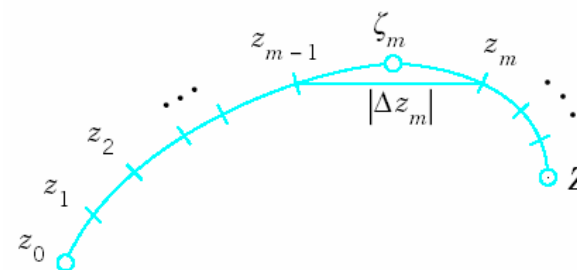
■ 적분한계값과 ML 부등식

- 복소선적분의 절대값을 대략적으로 구하는 경우에 사용
- ML 부등식의 공식

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

L : C 의 길이

M : C 위의 모든 곳에서 $|f(z)| \leq M$ 을 만족하는 상수



■ 증명 $S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m, \quad \Delta z_m = z_m - z_{m-1}$

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \leq \sum_{m=1}^n |f(\zeta_m)| |\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^n |\Delta z_m| = ML^*$$

L^* : 파선으로 된 현들의 전체 길이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n |\Delta z_m| = ML \Rightarrow \int_C f(z) dz \leq ML$$

14.1 복소평면에서의 선적분-15

■ 적분한계값과 ML 부등식(계속)

□ 예제8 : 적분의 추정

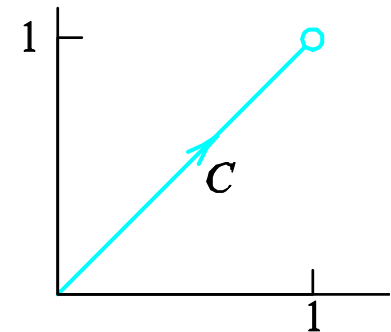
- 적분의 절대값에 대한 상계(upper bound)를 구하라.

$$\int_C z^2 dz, \quad C: 0 \text{부터 } 1+j \text{까지의 선분}$$

$$L = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|f(z)| = |z^2| \leq |(1+i)^2| = |2i| = 2 \Rightarrow M = 2$$

$$\left| \int_C z^2 dz \right| \leq ML = 2\sqrt{2} = 2.8284$$



- 예제1에서 적분의 절대값

$$\int_0^{1+j} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+j} = \frac{1}{3} (1+j)^3 = -\frac{2}{3} + j \frac{2}{3}$$

$$\left| \int_C z^2 dz \right| = \left| -\frac{2}{3} + i \frac{2}{3} \right| = 0.9428 \leq 2.28284 = ML$$

14.1 과제

- 매개변수 표현 : 문제1, 3
- 매개변수 표현 : 문제13, 15, 17
- 적분 : 문제19, 21, 25

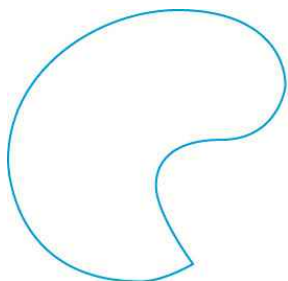
14.2 Cauchy의 적분정리-1

■ 복소함수의 선적분

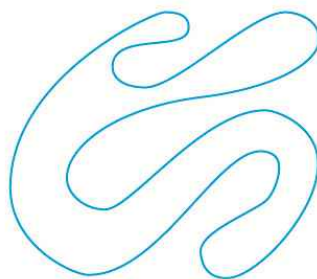
- 끝점에만 좌우되는 것이 아니라, 경로 자체의 선택에도 의존
- 경로의 의존성은 종종 문제의 까다로움을 유발
 - 문제의 까다로움이 발생하지 않을 조건이 매우 중요
- 복소선적분이 경로 선택에 의존하지 않는 경우
 - $f(z)$ 가 영역 D 에서 해석적이고, D 가 단순 연결되었을 때

■ 단순 닫힌 경로(simple closed path)

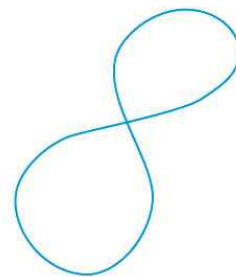
- 스스로 교차하거나 접촉하지 않는 닫힌 경로
- 예: 원은 단순 닫힌 경로, 8자형곡선은 단순 닫힌 경로가 아님



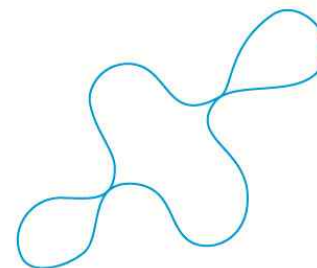
단순



단순



단순하지 않음



단순하지 않음

14.2 Cauchy의 적분정리-2

■ 단순연결영역(simply connected domain)

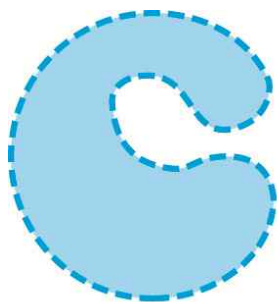
- 모든 단순 닫힌 경로가 오직 영역의 점들만 둘러싸고 있는 영역
- 예 : 원(열린 원판), 타원, 단순 닫힌 곡선의 내부

■ 다중연결(multiply connected)

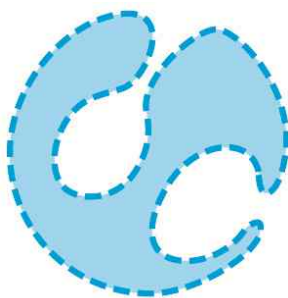
- 단순연결되지 않은 영역 : 예(환형)

■ 유계영역(bounded domain)

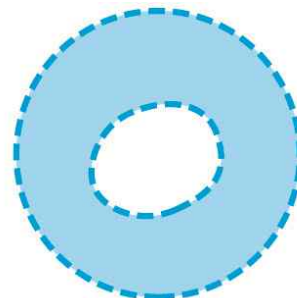
- 원점이 중심인 어떤 원의 내부에 완전히 속해 있는 영역



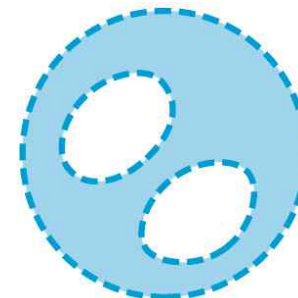
단순연결



단순연결



이중연결

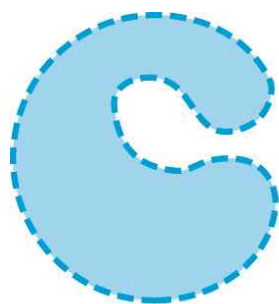


삼중연결

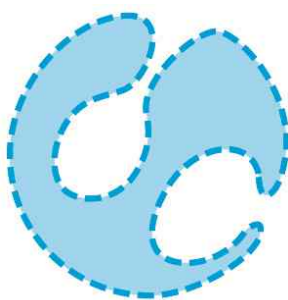
14.2 Cauchy의 적분정리-3

■ p 중연결(p -fold connected)

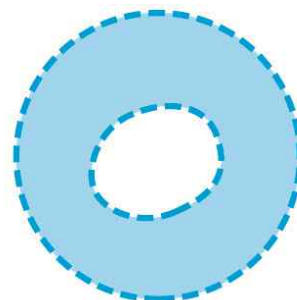
- 유계영역의 경계가 공통점이 없는 p 개의 닫힌 연결집합으로 구성되어 있을 때
- 경계의 집합 : 곡선, 선분, 점
- $p-1$ 개의 구멍(holes)으로 구성
 - 구멍 : 선분이나 한 점을 의미할 수도 있음
- 예 : 환형은 2중연결($p=2$)



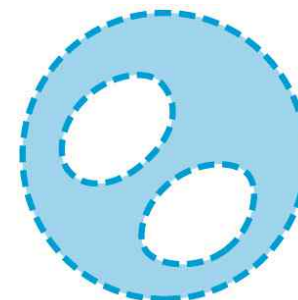
단순연결



단순연결



이중연결



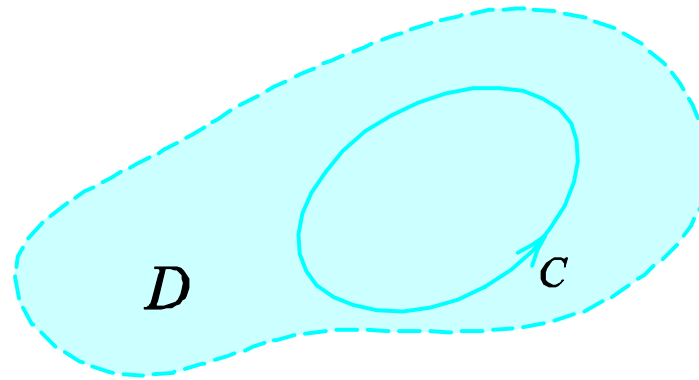
삼중연결

14.2 Cauchy의 적분정리-4

■ 정리1 : Cauchy의 적분정리

- $f(z)$ 가 단순연결 정의역 D 에서 해석적이면
- D 에 있는 모든 단순 닫힌 곡선 C 에 대하여

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



- ❖ 윤곽선(contour) : 단순 닫힌 경로
- ❖ 윤곽선 적분(contour integral)
 - 단순 닫힌 경로를 따르는 적분

14.2 Cauchy의 적분정리-5

■ 정리1 : Cauchy의 적분정리(계속)

□ 예제1 : 특이점이 없는 경우 = 완전함수인 경우

$$\oint_C e^z dz = 0, \quad \oint_C \cos z dz = 0, \quad \oint_C z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

■ $e^z, \cos z, z^n$: 완전함수(모든 z 에 대해 해석적인 함수)이기 때문

□ 예제2 : 윤곽선 밖에 있는 특이점

■ C : 단위원

$z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ 에서 $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ 는 비해석적이거나, 모두 C 의 밖에 위치

$$\Rightarrow \oint_C \sec z dz = 0$$

$\frac{1}{z^2 + 4}$ 가 해석적이지 않은 점 $z = \pm j2$ 는 C 의 밖에 위치

$$\Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

14.2 Cauchy의 적분정리-6

■ 정리1 : Cauchy의 적분정리(계속)

□ 예제3 : 비해석적인 함수

- C : $z(t) = e^{jt}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)가 단위원일 때 반시계 방향으로 적분

$$\oint_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-jt} j e^{jt} dt = j2\pi \neq 0$$

$f(z) = \bar{z}$ 는 해석함수가 아니므로 Cauchy의 정리가 적용되지 않음

□ 예제4 : 해석성은 필요조건이 아니라 충분조건이다.

- C : 단위원 $\Rightarrow z(t) = e^{jt}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} e^{-j2t} j e^{jt} dt = j \int_0^{2\pi} e^{-jt} dt = j \int_0^{2\pi} (\cos t - j \sin t) dt = 0$$

$z=0$ 에서 $f(z) = \frac{1}{z^2}$ 는 비해석적 $\Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$ 은 Cauchy의 정리로부터 나오지 않았음

$\therefore D$ 에서 f 가 해석적이라는 조건은

Cauchy의 정리가 성립하기 위한 필요조건이라기보다는 충분조건

14.2 Cauchy의 적분정리-7

■ 정리1 : Cauchy의 적분정리(계속)

□ 예제5 : 단순 연결은 필수적이다.

■ 단위원 주위를 따라 반시계방향으로 $1/z$ 을 적분

□ C : 단위원 $\Rightarrow z(t) = e^{jt} \ (0 \leq t \leq 2\pi)$

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-jt} j e^{jt} dt = j2\pi \neq 0$$

- C 는 $f(z) = 1/z$ 이 해석적인 환형 $1/2 < |z| < 3/2$ 안에 놓여 있지만
- 정의역이 단순 연결되어 있지 않으므로 Cauchy의 정리 적용 불가
 - $1/z$ 은 점 $z=0$ 에서 비해석적

➔ 정의역 D 가 단순연결 되어 있어야 한다는 조건은 아주 필수적

14.2 Cauchy의 적분정리-8

■ 정리2 : 경로 독립성

- 만일 $f(z)$ 가 단순연결된 정의역 D 내에서 해석적이면
- $f(z)$ 의 적분은 D 내의 경로에 독립적임

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

□ 증명

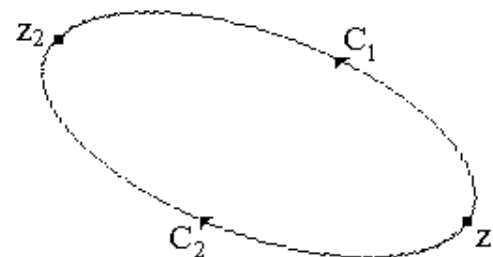
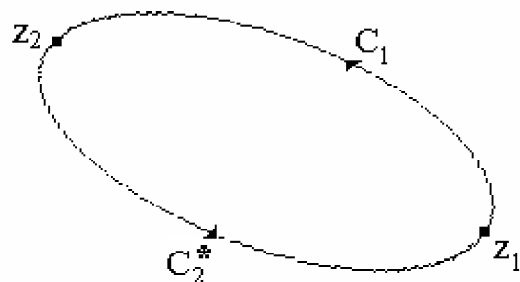
■ 두 끝점만이 공통인 경로의 경우

- 단순 닫힌 경로이므로 코시의 적분 정리에 의해 적분값은 0

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2^*} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_2^*} f(z)dz$$

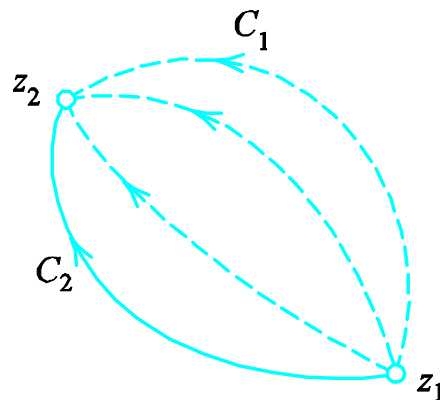
$$\int_{C_2} f(z)dz = -\int_{C_2^*} f(z)dz \Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

■ 여러 개의 공통점을 갖는 경우



14.2 Cauchy의 적분정리-9

- **경로변형의 원리(principle of deformation of path)**
 - 변형경로가 항상 $f(z)$ 가 해석적인 점만 포함하는 한,
 - 변형경로 : 양끝을 고정한 채 연속적으로 변형한 적분경로
 - 선적분의 값은 어떠한 변형이 있더라도 같은 값을 유지



- 예제6 기본 결과 : 정수제곱의 적분

$$\oint_C (z - z_0)^m dz \xrightarrow{z=z_0 + \rho e^{it}, dz=i\rho e^{it}} j\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{j(m+1)t} dt = j\rho^{m+1} \left[\int_0^{\pi} e^{j(m+1)t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{j(m+1)t} dt \right]$$

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} j2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ 및 정수}) \end{cases}$$

14.2 Cauchy의 적분정리-9

■ 정리3 : 부정적분의 존재성

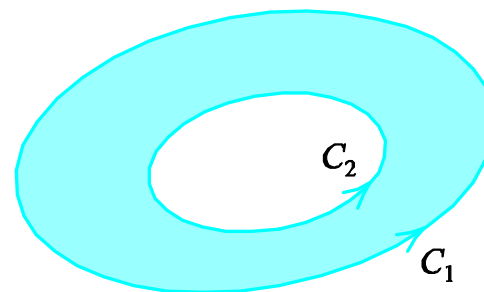
- 만약 $f(z)$ 가 단순연결 영역 D 에서 해석적이면
- $f(z)$ 의 부정적분 $F(z)$ 가 D 에서 존재
 - $F(z)$ 는 D 에서 해석적이고 $F'(z) = f(z)$ 를 만족
- D 내의 임의의 두 점 z_0 와 z_1 를 잇는 모든 경로에 대한 적분

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

■ 다중연결 영역에 대한 Cauchy의 적분정리

- D : 바깥 경계곡선 C_1 과 안쪽 경계곡선 C_2 를 갖는 2중연결 영역
- D^* : D 와 그 경계곡선들을 포함하는 임의의 정의역
- $f(z)$ 가 D^* 내에서 해석적이면

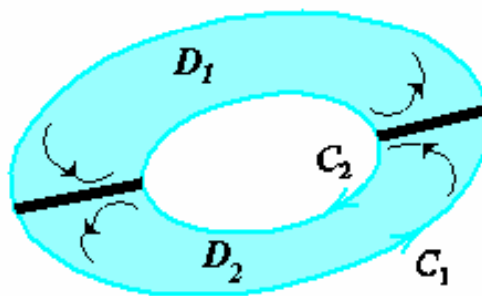
$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$



14.2 Cauchy의 적분정리-10

■ 다중연결 영역에 대한 Cauchy의 적분정리(계속)

□ 증명



$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

■ 14.2 과제

- 코시의 적분정리 : 문제3, 5, 7, 9
- 윤곽선 적분 : 문제19, 21, 23

14.3 Cauchy의 적분공식-1

■ Cauchy의 적분공식

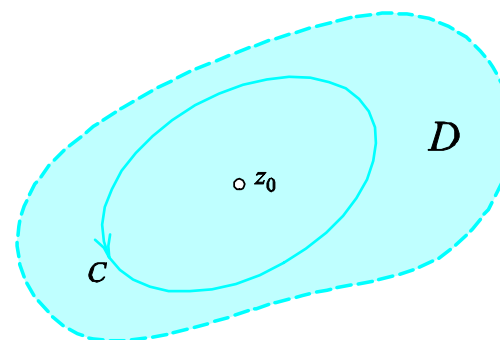
- Cauchy의 적분정리에서 얻어지는 가장 중요한 결과
- 적분을 계산하는데 유용
- 핵심적 역할을 수행
 - 해석함수가 모든 계(order)의 도함수를 갖는다는 사실의 증명
 - Taylor 급수 표현의 확립

■ 정리1 : Cauchy의 적분공식(Cauchy's integral formula)

- $f(z)$ 가 단순연결 영역 D 에서 해석적
- C : 임의의 점 z_0 를 둘러싸고 있는 D 안의 임의의 단순 닫힌 곡선

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = j2\pi f(z_0)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



14.3 Cauchy의 적분공식-2

■ 정리1 : Cauchy의 적분공식(계속)

□ 증명

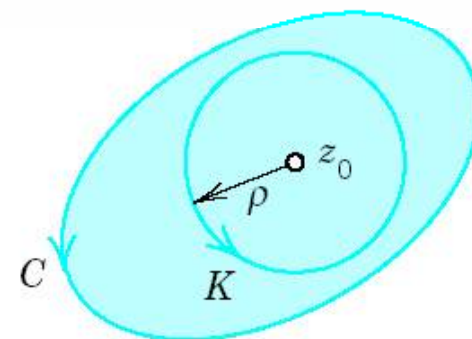
$$f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

■ $f(z)$ 는 해석적이므로 연속

- $\varepsilon > 0$ 이 주어졌을 때 원판 $|z - z_0| < \delta$ 안에 있는 모든 z 에 대하여
- $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ 이 되는 $\delta > 0$ 이 존재
- ρ 를 δ 보다 작게 택하면

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} = L$$



$$\left| \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < ML = \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

14.3 Cauchy의 적분공식-3

■ 예제1 : Cauchy의 적분공식

□ $f(z)=e^z$ (완전함수)에서 $z_0=2$ 를 둘러싸고 있는 윤곽선에 대하여

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz = \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = j2\pi e^z \Big|_{z=2} = j2\pi e^2 = j46.4268$$

■ $z_0=2$ 를 외부에 갖고 있는 임의의 윤곽선에 대해서는 0

□ Cauchy의 적분정리에서 윤곽선 밖에 있는 특이점에 대한 적분은 0

■ 예제2 : Cauchy의 적분공식

$$\oint_C \frac{z^3 - 6}{2z - j} dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3 - 3}{z - j\frac{1}{2}} dz = j2\pi \left[\frac{1}{2}z^3 - 3 \right] \Big|_{z=j\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} - j6\pi$$

$$\Rightarrow C \text{ 내부에서 } z_0 = j\frac{1}{2}$$

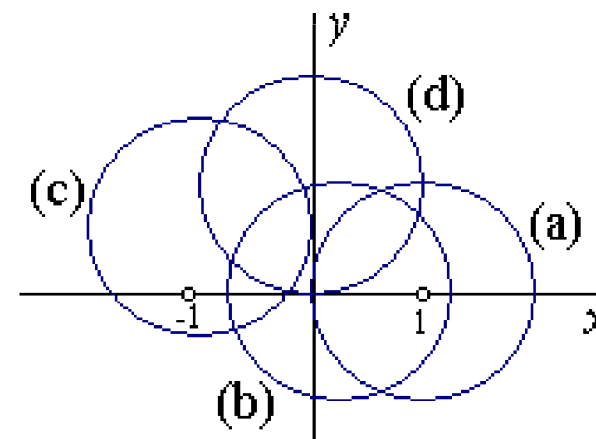
14.3 Cauchy의 적분공식-4

■ 예제3 : 상이한 윤곽선 주의의 적분

□ 4개의 원을 따라 각각 반시계방향으로 적분하라.

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)}$$

□ $g(z)$: 1, -1 에서 비해석함수



(a) 점 $z_0=1$ 을 둘러싸는 원 $|z-1|=1$

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \cdot \frac{1}{z - 1} \Rightarrow f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - 1} dz = j2\pi f(1) = j2\pi \left. \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right|_{z=1} = j2\pi$$

(b) 경로 변경의 원리에 의해 (a)와 동일

14.3 Cauchy의 적분공식-5

■ 예제3 : 상이한 윤곽선 주의의 적분(계속)

□ 4개의 원을 따라 각각 반시계방향으로 적분하라.

(c) 점 $z_0=-1$ 을 둘러싸는 원 : $z - z_0 = z + 1$

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z - 1} \cdot \frac{1}{z + 1} \Rightarrow f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z + 1} dz = j2\pi f(-1) = j2\pi \frac{z^2 + 1}{z - 1} \Big|_{z=-1} = -j2\pi$$

(d) 윤곽선 밖에 특이점이 있는 경우

□ 피적분 함수가 해석적이지 않은 점 $z = \pm 1$ 이 C 밖에 있음

▪ $f(z)$: 단순연결 정의역에서 해석적

□ Cauchy의 적분정리에 의해

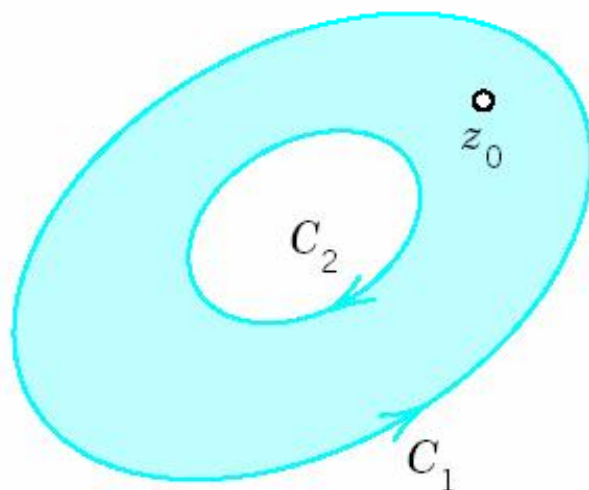
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

14.3 Cauchy의 적분공식-6

■ 다중연결 영역(multiply connected domains)

- $f(z)$ 가 C_1 과 C_2 및 C_1 과 C_2 에 의해 둘러싸인 고리 모양의 영역 안에서 해석적이고
- z_0 가 그 영역에 있는 임의의 점이면

$$f(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



밖에서의 적분은 반시계 방향
안에서의 적분은 시계 방향

14.3 Cauchy의 적분공식-7

■ 연습문제 14.3

- 윤곽선 적분 : 1, 3
- Cauchy의 적분공식을 사용하여 윤곽선 적분 : 5, 7, 9, 11, 13

14.4 해석함수의 도함수-1

■ 정리1 : 해석함수의 도함수

□ $f(z)$ 가 한 영역 D 에서 해석적이면

- D 에서 모든 계의 도함수를 갖고 있으며,
- 그 도함수도 역시 해석적임

□ D 에 있는 점 z_0 에서 도함수의 값에 대한 공식

$$f'(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

C : z_0 를 둘러싸면서 내부 전체가 D 에 속해 있는 D 안의 임의의 단순 닫힌 경로
 C 주위에서 반시계 방향으로 적분

14.4 해석함수의 도함수-2

■ 정리1 : 해석함수의 도함수(계속)

□ 증명

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$\text{Cauchy 적분 공식 : } f(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f(z_0 + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z} dz$$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C \frac{f(z)(z - z_0 - z + z_0 + \Delta z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

14.4 해석함수의 도함수-3

■ 정리1 : 해석함수의 도함수(계속)

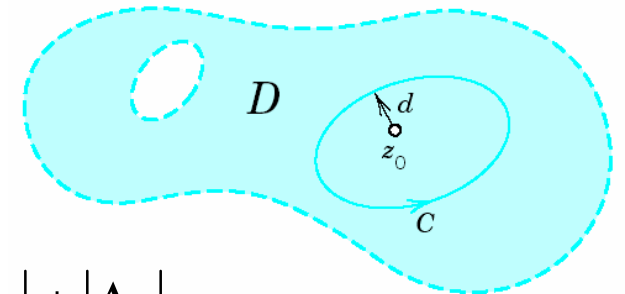
□ 증명(계속)

$$\xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz$$

- 함수 $f(z)$ 는 해석적 : $\mathbb{C}$ 위에서 연속이고, $|f(z)| \leq K$
- z_0 에서 C 의 점들까지의 최소거리 : d

$$|z - z_0|^2 \geq d^2 \Rightarrow \frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2}$$



$$d \leq |z - z_0| = |z - z_0 - \Delta z + \Delta z| \leq |z - z_0 - \Delta z| + |\Delta z|$$

$$\xrightarrow{|\Delta z| \leq d/2} \frac{1}{2}d \leq d - |\Delta z| \leq |z - z_0 - \Delta z| \Rightarrow \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{d}$$

14.4 해석함수의 도함수-4

■ 정리1 : 해석함수의 도함수(계속)

□ 증명(계속)

■ C 의 길이를 L 이라 하고, $|\Delta z| \leq d/2$ 일 때

$$\oint_C \left| \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| \leq ML = K|\Delta z| \frac{2}{d} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot L \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz = 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

14.4 해석함수의 도함수-5

■ 예제1 : 선적분의 계산

□ 점 $j\pi$ 를 싸고 있는 임의의 윤곽선에 대한 반시계 방향의 적분

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - j\pi)^2} dz = ?$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = j2\pi f'(z_0)$$

$$f(z) = \cos z \Rightarrow f'(z_0) = -\sin z \Big|_{z=j\pi} = -\sin(j\pi) = -j \sinh \pi$$

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - j\pi)^2} dz = j2\pi f'(j\pi) = 2\pi \sinh \pi$$

$\cosh jz = \cos z$	$\cos jz = \cosh z$
$\sinh jz = j \sin z$	$\sin jz = j \sinh z$

14.4 해석함수의 도함수-6

■ 예제2 : 선적분의 계산

□ 점 $-j$ 를 싸고 있는 임의의 윤곽선에 대한 반시계 방향의 적분

$$\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + j)^3} dz = ?$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = j\pi f''(z_0)$$

$$f(z) = z^4 - 3z^2 + 6 \Rightarrow f'(z_0) = 4z^3 - 6z \Rightarrow f''(z_0) = 12z^2 - 6 \Big|_{z=-j} = -18$$

$$\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + j)^3} dz = j\pi f''(-j) = -j18\pi$$

14.4 해석함수의 도함수-7

■ 예제3 : 선적분의 계산

□ 점 1이 내부에 있고, $\pm j$ 가 외부에 놓여 있는 임의의 윤곽선

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)} dz = ?$$

- 윤곽선 밖의 특이점에 대한 선적분은 항상 0
- Cauchy의 적분공식을 이용하면

$$f'(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = j2\pi f'(z_0)$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+4} \Rightarrow f'(z_0) = \left. \frac{e^z(z^2+4-2z)}{(z^2+4)^2} \right|_{z=1} = \frac{e^1 \times 3}{25}$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)} dz = j2\pi f'(1) = \frac{j6\pi e}{25} \approx j2.050$$

14.4 해석함수의 도함수-8

■ Cauchy의 부등식과 Liouville와 Morera의 정리

□ Cauchy의 부등식

- C : 반지름이 r 이고 중심이 z_0 인 원
- ML 부등식을 이용 : $|f(z)| \leq M$

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r$$

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M}{r^n}$$

□ Liouville의 정리

- 어떤 완전함수가 전 복소평면에서 절대값이 유계이면,
- 이 함수는 반드시 상수이다

14.4 해석함수의 도함수-9

■ Cauchy의 부등식과 Liouville와 Morera의 정리(계속)

□ Morera의 정리 : Cauchy 적분정리의 역

- $f(z)$ 가 단순연결 영역 D 에서 연속이고,
- D 에 있는 모든 닫힌 곡선에 대하여 $\oint_C f(z)dz = 0$ 이면
- $f(z)$ 는 D 에서 해석적이다.

14.4 해석함수의 도함수-10

■ 연습문제 14.4

- 윤곽선 적분 : 1, 3, 5
- 상이한 윤곽선에서의 적분 : 9, 11, 13