세 점으로 평면의 식 구하기

평면은 주어진 점 P를 지나고 $\vec{\mathbf{n}}=(a,b,c)$에 수직인 모든 점 $X(x,y,z)$의 집합이다.

$\vec{\mathbf{n}}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP})=0$

여기서 O는 원점 $(0,0,0)$이다. 또한 $\vec{\mathbf{n}}\cdot\overrightarrow{OP}=-d$라 하면, 상기 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$ax+by+cz+d=0$

세 점 $Q(q_x,q_y,q_z),R,S$을 지나는 평면의 방정식은 다음과 같이 구한다. 먼저 $\overrightarrow{QR}$과 $\overrightarrow{QS}$에 수직인 평면의 법선벡터 $\vec{\mathbf{n}}$을 계산한다.

$\vec{\mathbf{n}}=(a,b,c)=\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS}$

그리고 평면의 방정식에 평면 위의 점 Q를 대입하여 d를 계산한다.

$d=-(aq_x+bq_y+cq_z)$

4개 이상의 점으로 평면의 방정식 구하기

점이 4개 이상일 때는 최소제곱법(least square method)으로 평면의 방정식을 찾는다. 평면의 방정식이 $ax+by+cz+d=0$ 꼴이기 때문에($\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{p})=0$, $\vec{n}=(a,b,c)$, $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{n}\cdot\vec{p}=-d$) 각각의 점 $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$, $R(x_3,y_3,z_3)$, $\cdots$ 을 평면의 방정식에 대입한 연립방정식을 행렬로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ & \vdots & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

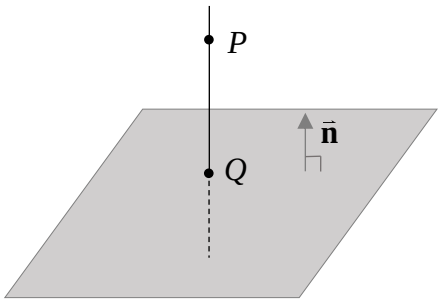
상기 행렬은 동차방정식 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 형태다. 여기서 우리가 구하고자 하는 해 $\mathbf{x}$ 는 특이값 분해(Singular Value Decomposition, SVD)로 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}=\mathbf{U\Sigma V}^T$$

여기서 해는 $\mathbf{V}$ 의 마지막 열 벡터가 된다.

평면에 내린 수선의 길이

점 $P(p_x, p_y, p_z)$에서 평면에 내린 수선의 길이는 다음과 같이 계산한다.



평면의 방정식이 $ax+by+cz+d=0$ 일 때, 평면에 수직인 벡터는 $\vec{\mathbf{n}}=(a \quad b \quad c)$이고 그 크기가 1이라 하자($\mathrm{a}^2+b^2+c^2=1$). 그리고 점 P를 지나며 평면에 수직인 직선의 식은 $l=\overrightarrow{OP}+t\vec{\mathbf{n}}$이고, 직선과 평면이 $t=k$일 때 교점이 Q라면, 수선의 길이 d는 다음과 같다:

$$d=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\left\|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right\|=\left\|\overrightarrow{OP}+k\vec{\mathbf{n}}-\overrightarrow{OP}\right\|=|k|$$

여기서 k는 평면과 직선의 교점에서 t가 가지는 값이다.

$$a(p_x+ka)+b(p_y+kb)+c(p_z+kc)+d=0$$

상기 식을 k에 대하여 정리하면 다음과 같다:

$$k=-\frac{ap_x+bp_y+cp_z+d}{a^2+b^2+c^2}=-(ap_x+bp_y+cp_z+d)$$

* 위키피디아에도 정리되어 있다: http://ko.wikipedia.org/wiki/%ED%8F%89%EB%A9%B4