현장 전기기술자를 위한

미분방정식의 이해

2004.11.18

이종수

목차

내용 페이지

1 미분방정식의 이해

우리가 살고 있는 자연계의 물리현상은 대부분이 시간이나 거리와 같은 변수들에 대한 미분방정식이라고 불리는 수식의 형태로 표현될 수 있다.

이러한 자연계의 물리현상을 미분방정식과 같은 수식으로 나타내는 것을 "물리계의 수학적 모델링" 이라고 하며, 이러한 물리현상을 효율적으로 조합하여 실생활에 활용하도록 하는 실용적인 학문인 공학을 공부하는 기술자들에게 미분방정식의 이해는 필수적이라고 해도 과언이 아니라고 생각한다.

지금부터 기술하는 내용은 미적분에 대한 기본개념을 파악하고 있는 현장의 기술자를 (특히 전기 엔지니어) 대상으로 하는 것임을 밝혀두며, 이에 대한 기본개념을 공부하지 않은 독자는 우선 필자가 작성해 놓은 **"미적분 기본개념"** 편을 숙지하여야 한다.

1.1 미분방정식의 개념

미분방정식이란 다음과 같이 미분 항을 포함하고 있는 방정식을 말하며 미분을 1번 행한 항이 포함되어 있으면 1계 또는 1차 (First Order), 2번 미분을 행한 항이 포함되어 있으면 2계 또는 2차 (Second Order) 방정식이라고 한다.

이 이외에도 더 높은 고계 미분방정식이 있지만 현실적으로 2계 미분방정식 정도를 완전히 이해하고 있으면 엔지니어로써 현업을 수행하는 것이 충분하다고 생각하며 본 교재는 2계 미분방정식을 이해하고 풀어내는 기법을 중심으로 설명하도록 한다.

$$y' + f(x)y = r(x) \Rightarrow (First)$$

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \Rightarrow (Second)$$

$$y^{(3)} + f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = r(x) \Rightarrow (Third)$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

$$y^{(n)} + f(x)y^{(n-1)} + \bullet\bullet\bullet + z(x)y = r(x) \Rightarrow (n-th)$$

미분방정식을 표기할 때는 표기상의 편리를 위해 **"dx/dy"** 보다는 위와 같이 **y'** 을 사용하는 것이 보통이며 변수는 시간이나 거리와 같은 것이 될 수 있지만, 본 교재에서는 통상의 경우처럼 변수를 **x**로 하여 사용하며 종속변수를 **y**로 표기할 예정이지만, 물리현상이 주로 시간의 함수인 전기공학의 경우에는 변수는 시간, 종속변수는 전압이나 전류 및 전력이 될 것이다.

1.2 미분방정식의 풀이의 의미

미분방정식을 풀어서 그 해를 구하는 것은 미분하기전의 원시함수를 구하는 것과 같은 것이며, 다른 말로 하면 부정적분을 하는 것으로 생각하면 된다.

이해를 돕기 위해 다음과 같은 간단한 1차 미분방정식을 풀어보자.

$$y' = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c$$

위의 미분방정식의 미분해서 **x^2**이 되는 함수를 찾아내라는 의미로서 그 원시함수는 당연히 위에서 구한 것과 같이 될 것이다.

즉, 미분방정식을 풀어 해를 구하는 것은 미분하기 전의 원시함수를 구해가는 것이라고 보면 된다.

따라서 미분방정식을 풀기 위해서는 각 함수의 미분에 대한 규칙을 잘 알고 있어야 하는 것은 필수적이라고 할 수 있으며 이에 대한 사항은 필자가 작성해 놓은 "미적분 기본개념"이나 다른 수학서적을 활용하면 될 것이다.

이번에는 다음과 같은 간단한 2차 미분방정식을 풀어본다.

$$y'' = e^{ax} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}$$

$$y' = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c_1$$

$$y = \int (\frac{1}{a}e^{ax} + c_1)dx = \frac{1}{a^2}e^{ax} + c_1x + c_2$$

위와 같이 2차 미분방정식을 풀기 위해서는 주어진 함수를 2번 적분하여야 함을 알 수 있으며 이는 부정적분을 2번 실시해야 함을 의미한다.

1.3 미분방정식의 구분

미분방정식은 방정식의 우변의 값에 따라 통상 다음과 같이 두가지로 구분한다.

1.3.1 제차 미분방정식 (Homogeneous)

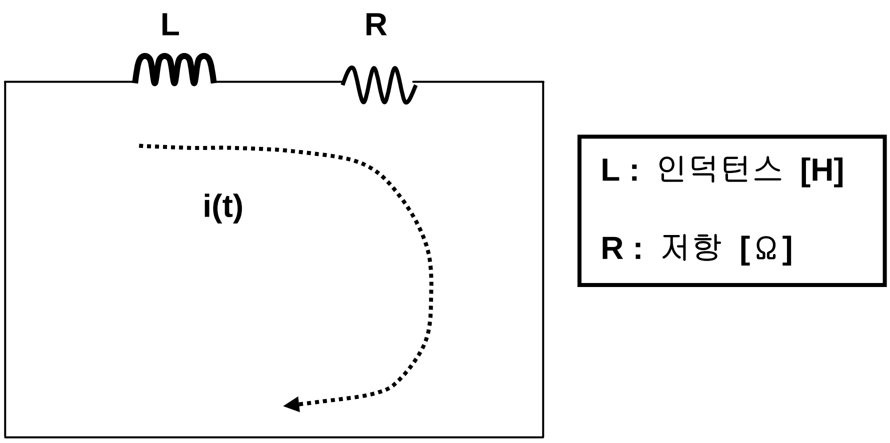
미분방정식의 우변의 값이 다음과 **"0"**의 값을 갖는 것이다.

$$y' + f(x)y = 0$$

[제차 방정식의 형태]

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

이 제차 방정식은 그 해를 구하는 과정이 매우 간단한 것이 특징이며 이와 같은 방정식으로 모델링 될 수 있는 물리계는 외부에서 전원이 연결되지 않고 코일이나 콘덴서에 축적된 에너지로 구동 되는 전기회로나 당겨진 스프링에 축적된 탄성에너지로 운동하는 메커니즘의 경우가 대표적이라 할 수 있다.



[구동전원이 없는 전기회로]

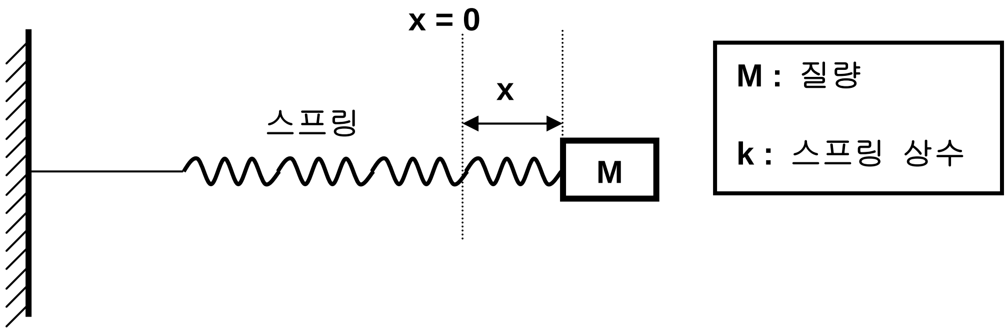
위와 같은 전기회로의 미분방정식은 다음과 같이 표현되며 회로의 전류의 시간적인 변화는 초기에 코일에 축적되어 있는 자기에너지에 의해서 결정된다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

[구동전원이 없는 전기회로의 미분방정식]

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

이와 같은 경우에는 전류의 시간적인 변화를 찾는 것이기 때문에 미분변수는 시간인 **"t"**가 된다.



[당겨진 스프링 메커니즘]

위와 같은 메커니즘에서 질량 M의 운동은 초기에 당겨진 스프링에 축적된 탄성에너지에 의해서 결정됨을 알 수 있으며 운동방정식은 다음과 같이 2차 미분방정식으로 표현된다.

$$F = -kx \Rightarrow F + kx = 0$$

$$F = Ma = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow (\therefore v = \frac{dx}{dt})$$

[당겨진 스프링의 운동방정식]

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

위에서 예를 든 미분 방정식들의 풀이 방법은 다음에 설명하는 과정에서 기술할 것이다.

1.3.2 비제차 미분방정식 (Non-Homogeneous)

미분방정식의 우변이 “0”이 아닌 형태를 의미한다.

그런데 독자들이 우변의 항들을 좌변으로 이항하면 우변이 “0”이 되는데 제차방정식과 다른 것이 무엇인가 하는 의문을 가질 수 있어서 간단히 그 의미를 살펴보는데 다음에 설명하는 것은 문헌에 나와 있는 것은 아니지만 필자가 미분방정식을 접하면서 나름대로 개념을 잡은 것이기 때문에 수학자들이 내린 정의와 약간 다를 수도 있음을 밝혀둔다.

영어로 되어있는 Non-Homogeneous가 의미하듯 비제차 방정식의 우변은 좌변의 제차방정식 부분만을 풀어서 구해지는 함수와 다른 형태를 가진다는 것이다.

즉, 제차방정식을 풀게 되면 그 해가 동일한 종류의 함수로 이루어 지게 되는데 비제차 방정식을 풀게 되면 그 해가 서로 다는 형태의 여러 함수를 포함하게 된다는 것이다.

다시 한번 설명하면 제차방정식의 해는 지수함수나 삼각함수, 일반 다항함수와 같은 하나의 함수형태가 되지만 비제차 방정식의 해는 이들이 서로 혼합되어 있는 형태가 된다는 것이다.

비제차 미분방정식은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$y' + f(x)y = r(x)$$

[비제차 방정식의 형태]

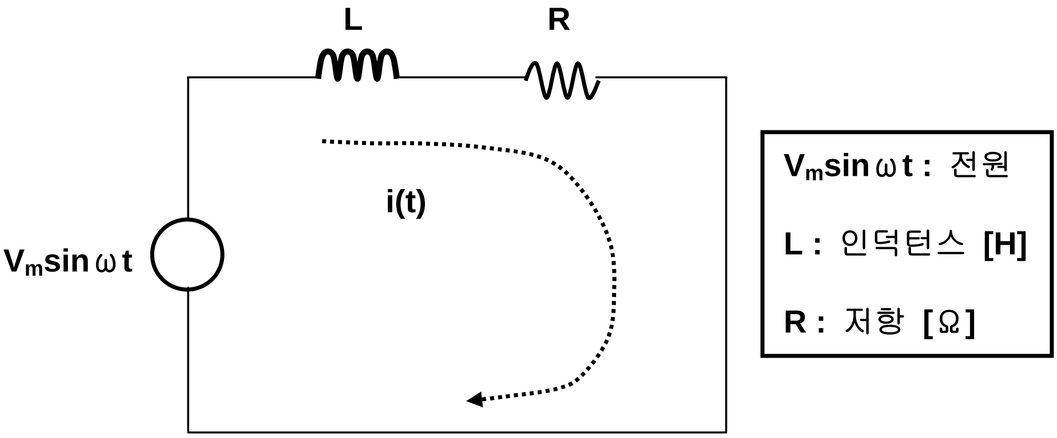
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

이런 비제차 방정식으로 모델링 될 수 있는 물리계는 구동전원을 가진 전기회로가 대표적이라고 할 수 있다.

물론 다른 물리계도 이처럼 모델링 될 수 있겠지만 필자가 전기공학도이기 때문에 가장 익숙한 예를 들었으며 관심이 있는 독자들은 찾아보기 바란다.

참고로 비제차 미분방정식의 우변의 함수를 전기공학에서는 강제전원 함수 또는 입력전원 함수, 구동 전원함수 등으로 부른다는 것을 알아두기 바란다.

다음 그림과 같이 구동전원이 접속된 전기회로의 방정식이 비제차 미분방정식의 대표적인 예가 된다.



[구동전원을 포함한 전기회로**]**

앞 회로는 다음과 같이 1차의 비제차 미분방정식으로 기술된다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \sin \omega t$$

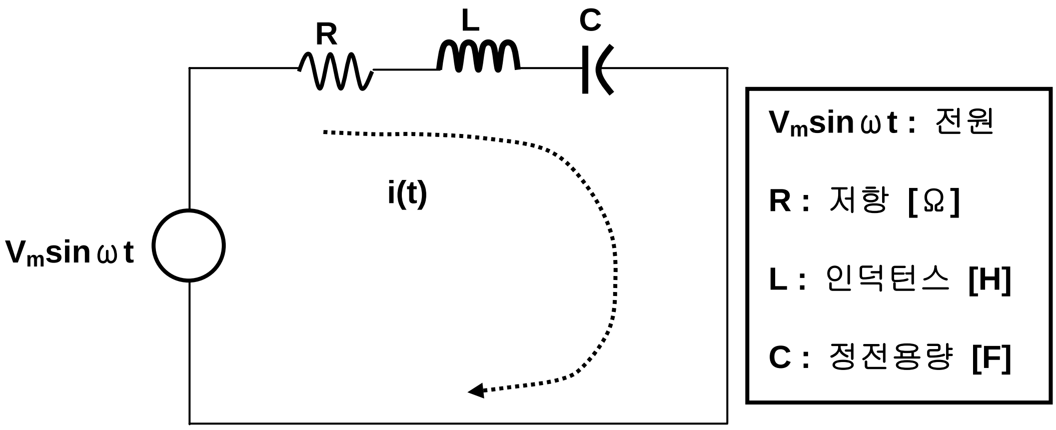
[구동전원이 있는 회로의 미분방정식**]**

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_m}{L}\sin \omega t$$

참고로 전기공학에서는 위의 회로를 **"R-L 직렬회로"** 라고 부른다.

전기공학에서 미분방정식은 주로 회로해석에 적용되는데 대부분의 경우 1차 및 2차 미분방정식으로 나타나게 된다.

1차 미분방정식의 형태는 위의 회로와 **"R-C 직렬회로"** 가 대표적이며, 또한 2차 미분방정식은 다음 그림과 같은 **"R-L-C 직렬회로"** 가 대표적이다.



[구동전원을 포함한 R-L-C 직렬회로]

위 회로의 미분방정식을 다음과 같이 기술되며, 기술과정에서 양변을 인덕턴스 값인 L로 나누어주고 또 적분을 포함하고 있는 항을 제거하여 2차 미분방정식으로 나타낼 수 있도록 양변을 미분하고 있는 점에 유의하기 바란다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = V_m \sin \omega t$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \frac{V_m}{L}\sin \omega t$$ **[2차 미분방정식]**

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{\omega V_m}{L}\cos \omega t$$

지금까지 몇 가지 물리현상을 미분방정식으로 기술하는 과정을 예로 들었는데 이제는 미분방정식을 풀어가는 기법들에 대하여 알아보도록 한다.

1.4 선형 1차 미분방정식의 풀이 기법

미분방정식을 해결하는 기법들은 미분방정식의 형태 만큼이나 다양하지만 여기서는 가장 간단하고 많이 사용되는 선형 미분방정식을 해결하는 기법 위주로 기술하도록 할 것이다.

다른 기법들은 필자의 능력 밖의 것들이기도 하고 또한 공학에서 적용되는 빈도가 낮다고 생각하며 여기에서 기술되는 기본 사항들을 이해한다면 어렵지 않게 접근해 볼 수도 있을 것이다.

선형 미분방정식이란 다음과 같이 방정식 각 항의 계수들이 상수 (Constant)이거나 미분변수와 동일한 변수로 구성된 함수일 경우를 의미한다.

$$\frac{dy}{dx} + Ky = r(x) \Rightarrow (K : const)$$

[선형 미분방정식의 예]

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$$

1.4.1 변수분리를 이용한 기법

선형 제차 미분방정식의 해를 구하기 위한 기본적인 기법이 다음과 같이 변수분리를 이용하는 것이다.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{f(x)}{g(y)} = 0$$

$$g(y)dy = -f(x)dx$$

[변수분리 기법을 이용하는 과정]

$$\int g(y)dy = -\int f(x)dx + c$$

이것을 위와 같이 일반적인 식으로 설명하면 이해하기가 어려울 수 있기 때문에 간단한 미분방정식을 예로 들어 풀어본다.

다음에 드는 예는 원의 방정식을 미분한 형태인데 이를 변수분리 기법을 적용하여 풀어서 실제로 원의 방정식이 되는지 확인해 본다.

$$y' + \frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = -\int xdx + c$$ **[변수분리를 이용한 풀이기법]**

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\therefore \ x^2 + y^2 = c_1$$

위 과정을 잘 음미해 보고 이해하기 바라며 서로 다를 변수를 갖는 양변을 서로 다른 변수로 적분하는 것이 약간 이해가 가지 않을 수 있지만 이는 가능한 것으로 증명되어 있는 것이나 그대로 이해하기 바란다.

과정에서 나타나는 적분상수는 큰 의미가 없는 것이기 때문에 첨자를 부여하여 하나로 처리해 가면 된다.

한가지 더 예를 들어본다.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} \Rightarrow 9ydy + 4xdx = 0$$

$$\int 9ydy + \int 4xdx = c$$

[변수분리에 의한 타원방정식]

$$\frac{9}{2}y^2 + 2x^2 = c \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c_1$$

이 변수분리 기법은 미분방정식을 해결하는데 있어 가장 기초적인 것이므로 다양한 문제를 접하여 기법적용을 숙지하고 있어야 한다.

1.4.2 완전 미분을 이용한 기법

어떤 함수의 완전미분은 다음과 같이 **"Chain Rule"**을 적용한 미분을 의미하며 이에 대한 내용은 필자가 작성해 놓은 "미적분 기본개념"편이나 타 수학서적을 참고하기 바란다.

$$f(x,y)=0$$

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=0$$ **[완전미분의 개념]**

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

주어진 미분방정식이 완전미분의 형태를 가지는지 알아보기 위해서는 다음과 같이 dx와 dy의 계수를 편미분 해서 동일한지 비교하면 된다.

$$Udx+Vdy=0\Rightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}=U,\frac{\partial f}{\partial y}=V)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$ **[완전미분 방정식의 조건]**

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}\Rightarrow (Exact)$$

따라서 완전미분 형태를 가진 미분방정식의 해를 구하는 것은 매우 간단한데 이를 확인해 보기 위해 예를 들어보자.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy = -xdx \Rightarrow xdx + ydy = 0$$

$$U = x, V = y \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$ **[완전 미분방정식의 풀이과정]**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$$

즉, 주어진 미분방정식이 완전 미분일 가질 경우 각각을 적분한 형태가 구하고자 하는 원시함수가 되기 때문에 해를 구하는 것이 매우 용이하게 된다.

즉 주어진 미분방정식이 완전 미분의 형태를 가진다면 **dx**의 항은 **x**로, **dy**의 항은 **y**로 각각 적분함으로써 간단하게 그 해를 구할 수 있다는 것이다.

만약 다음과 같은 미분방정식이 주어졌다면, 그 아래의 함수를 “Chain Rule”을 적용하여 완전미분 해 놓은 형태이다.

$$3x^2dx + 3y^2dy = 0$$ **[주어진 미분방정식]**

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - c = 0$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy = 0$$ **[주어진 미분방정식의 원시함수]**

$$= 3x^2dx + 3y^2dy = 0$$

본 완전미분 방정식은 1차 미분방정식의 해를 구하는데 중요한 역할을 하므로 개념을 완전히 이해하고 있어야 한다.

다음 절에 설명할 적분인자 (Integrating Factor)를 이해하는데 도움이 될 수 있도록 1차 미분방정식을 푸는 한가지 예를 더 들어본다.

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx + c$$

$$\ln y = -\int f(x)dx + c$$

$$y = e^{-\int f(x)dx + c} = e^{-\int f(x)dx} \times e^{c}$$

$$\therefore\ y = c_1 e^{-\int f(x)dx}$$

상기 미분방정식의 풀이 과정은 매우 중요하며 모든 1차 미분방정식의 해를 구하는데 기본적으로 활용되는 것이므로 정확하게 이해하고 있어야 한다.

사실 필자나 독자와 같은 기술자들이 접하는 1차 미분 방정식의 경우는 위 식만 정확하게 이해하고 있으면 대부분이 해결이 가능하다고 해도 무방하다.

풀이과정에서 나타난 지수와 로그의 변환에 대한 것은 미적분에 대한 기본개념을 파악하고 있는 독자들을 대상으로 하는 교재이기 때문에 별도의 설명은 하지 않지만 이해가 부족한 독자는 고등학교 수학서적과 같은 기본 자료를 참고하여 완전하게 자신의 것으로 소화해 놓기 바란다.

1.4.3 적분인자를 이용한 기법

앞에서 간단하게 설명한 변수분리 기법이나 완전미분 형태를 이용하는 기법들은 대부분 제차 미분방정식을 푸는데 용이한 것들이다.

하지만 지금 설명하는 적분인자를 이용한 기법은 제차 방정식을 물론 비제차 방정식에도 적용되는 기법이기 때문에 1차 미분방정식을 해결하는데 있어서 매우 강력한 도구라고 할 수 있다.

특히, 전기공학에서 나타나는 **R-L 직렬회로, R-C 직렬회로**와 같은 1차 미분방정식으로 기술되는 회로해석에 곧 바로 적용되기 때문에 전기 기술자들에게는 매우 쓸모 있는 기법으로 본 절의 내용을 충분히 이해하여 활용하여야 한다.

다음과 같이 우변이 완전 미분방정식이 아닌 1차 비제차 미분방정식이 주어졌다고 하자.

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$$

$$dy + \{f(x)y - r(x)\}dx = 0$$

만약 상기 미분방정식에 임의의 함수 **M(x)**를 곱해주면 완전 미분형태로 변환될 경우 이 **M(x)**를 **"적분인자 (Integrating Factor)"**라고 한다.

따라서 본 적분인자를 구하는 것이 1차 미분방정식을 해결하는 열쇠라고 할 수 있는데 이 적분인자를 구해 보도록 한다.

Step 1

주어진 미분방정식에 다음과 같이 M(x) 곱해준다.

$$M(x)dy + M(x)\{f(x)y - r(x)\}dx = 0$$

Step 2

완전미분 형태인지를 확인하는 다음의 관계식을 이용하여 M(x)를 구한다.

$$M(x)\{f(x)y - r(x)\}dx + M(x)dy = 0$$

$$U = M(x)\{f(x)y - r(x)\}$$
$$V = M(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = M(x)f(x)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = \frac{dM(x)}{dx} = M'(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow (\because Exact)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = M(x)f(x)$$

$$\frac{dM(x)}{M(x)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dM(x)}{dx} = \int f(x)dx$$

$$\ln M(x) = \int f(x)dx$$

$$\therefore M(x) = e^{\int f(x)dx}$$

상기 적분인자를 구하는 과정에서 통상 적분상수는 고려하기 않으며 M(x)에 대한 편미분을 상미분으로 바꾸어 준 것은 M(x)가 x만의 함수이므로 이를 x에 대하여 편미분 한 것이나 상미분 한 것이 동일하기 때문이다.

Step 3

위에서 계산한 적분인자를 실제로 대입하여 맞게 구했는지 검산해 본다.

$$e^{\int f(x)dx}\{f(x)y - r(x)\}dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0$$

$$e^{\int f(x)dx}f(x)ydx + e^{\int f(x)dx}dy = e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

$$\frac{d}{dx}[e^{\int f(x)dx}y] = e^{\int f(x)dx}f(x)y + e^{\int f(x)dx}\frac{dy}{dx}$$

위의 검산과정에서 알 수 있듯이 좌변은 완전미분의 형태가 되고 있기 때문에 이제 미분방정식을 푸는 것은 간단하게 된다.

Step 4

마지막으로 적분인자를 고려하여 미분방정식을 풀어 해를 구한다.

$$\frac{d}{dx}[e^{\int f(x)dx}y] = e^{\int f(x)dx}r(x)$$

$$d[e^{\int f(x)dx}y] = e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

$$\int d[e^{\int f(x)dx}y] = \int e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

$$e^{\int f(x)dx}y = \int e^{\int f(x)dx}r(x)dx + c$$

$$\therefore\ y = e^{-\int f(x)dx}[\int e^{\int f(x)dx}r(x)dx + c]$$

적분인자를 고려하여 미분방정식의 해를 구하면 위와 같이 계산되며 이것이 1차 미분방정식에서 가장 중요한 것이므로 이를 잘 숙지하고 있어야 한다.

즉, 1차 선형미분방정식이 어떠한 형태로 주어지더라도 본 적분인자에 대한 개념만 이해하고 있으면 그 해는 간단하게 구할 수 있다.

따라서 업무를 수행하면서 접하게 되는 물리계를 정확하게 미분방정식으로 표현할 수 있는가 하는 것이 엔지니어들에게 중요한 숙제로 남게 된다.

적분인자를 적용하는 기법을 활용할 수 있도록 다음과 같은 미분방정식을 풀어 보도록 한다.

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V$$

여기서

V [V] : 회로의 구동전원 **(**직류**)**

i(t) [A] : 회로의 전류

L [H] : 회로의 인덕턴스

R [Ω] : 회로의 저항

이 미분방정식은 앞에서 언급한 구동전원이 접속된 R-L 직렬회로의 회로 방정식인데 독자들의 이해를 돕기 위해 구동전원을 시간의 함수인 교류대신 상수로 취급할 수 있는 직류로 대체하였다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

$$f(t) = \frac{R}{L}, r(t) = \frac{V}{L}$$

$$i = e^{-\int f(t)dt}[\int e^{\int f(t)dt} r(t)dt + c]$$

$$= e^{-\int \frac{R}{L}dt}[\int e^{\int \frac{R}{L}dt} \times \frac{V}{L}dt + c]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}[\frac{V}{L}\int e^{\frac{R}{L}tdt} + c]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}[\frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c]$$

위와 같이 해를 구한 후 회로의 초기조건을 적용하여 적분상수의 값을 결정하면 회로전류의 완전한 시간함수가 완성된다.

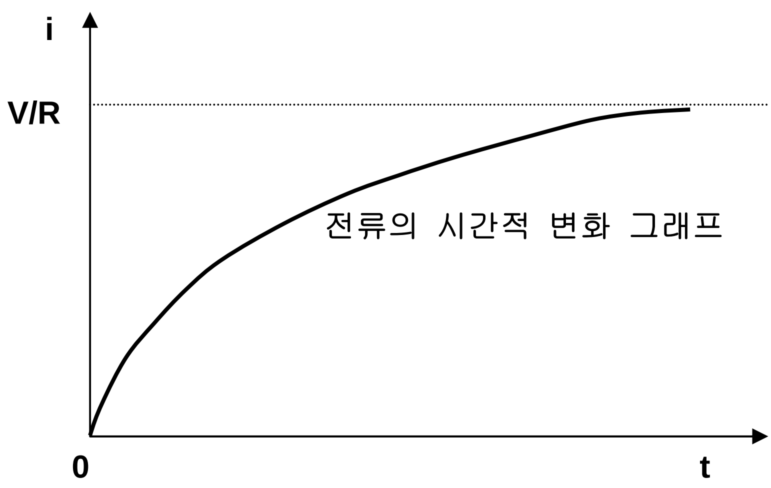
이해를 돕기 위해 다음과 같이 “t=0일 때 i=0”이라는 초기조건을 가정하여 위의 적분상수를 찾아내 보도록 한다.

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c\right)$$
$$= \frac{V}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$t = 0, i = 0$$
$$0 = \frac{V}{R} + c \Rightarrow c = -\frac{V}{R}$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$= \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

위와 같이 초기조건을 적용하여 구한 시간과 전류의 관계는 다음과 같다.



전기회로의 미분방정식에 대해서는 미분방정식의 응용부분에서 좀더 상세하게 설명하도록 하겠다.

위에서 살펴본 기법 이외에도 1차 미분방정식을 푸는 방법들은 많지만 현업에서 접하는 대부분의 미분방정식은 앞의 방법으로도 충분하다고 생각하기 때문에 여기서는 소개하지 않기로 한다.

1.5 선형 2차 미분방정식의 풀이기법

앞에서 언급했듯이 선형 2차 미분방정식이란 다음과 같은 형태를 말한다.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

선형 2차 미분방정식도 1차의 경우와 같이 변수분리나 완전미분 형태를 이용하는 방법으로 해결이 가능하지만 미분방정식의 모양을 보면 매우 복잡할 것으로 생각된다.

또한 위에서 보여진 것과 같이 미분항의 계수가 상수 항이 아닌 경우에는 그 풀이과정이 매우 복잡하기 때문에 본 교재에서는 상수계수를 갖는 미분방정식만을 다루도록 한다.

우리가 현업에서 접하는 대부분의 물리계가 상수계수를 갖는 미분방정식의 형태로 기술될 수 있기 때문에 여기서 다루는 기법만을 가지고도 충분히 해결이 가능할 것으로 생각된다.

상수계수를 갖는 미분방정식이란 다음과 같은 형태를 말한다.

$$y'' + ay' + by = r(x)$$
$$a, b \to const$$

1.5.1 제차 방정식의 풀이기법

제차 방정식이란 1차의 경우처럼 **r(x) = 0**인 형태를 의미한다.

$$y'' + ay + by = 0$$

물론 앞의 미분방정식에서 계수인 **a, b**는 실수이다.

그런데 실수인 상수를 계수로 하는 미분방정식의 해를 구하는 것에는 아주 중요한 단서가 하나 있다.

이는 미분을 2번 실시해도 변수를 포함하지 않고 상수만 나타나는 것으로부터 해의 형태에 대한 유추가 가능하다.

즉, 미분을 여러 번 실시해도 상수만이 나타난다는 것은 어떤 함수를 미분해도 그 형태가 변하지 않으며 또한 함수의 변수가 1차식인 것을 의미한다.

이렇게 미분을 실시해도 원래의 형태를 유지하는 함수는 삼각함수와 지수 함수이지만 삼각함수의 경우에는 상수를 계수를 가질 수 없기 때문에 지수함수만이 해당된다고 볼 수 있다.

따라서 상수계수를 갖는 미분방정식의 해는 변수가 1차식으로 표시되는 지수함수의 형태가 되기 때문에 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$y = e^{\lambda x}$$ **[상수계수를 갖는 미분방정식 해의 형태]**

위와 같이 해를 가정할 경우 적분상수는 일단 고려하지 않고 나중에 최종적으로 해가 구해진 후 고려해 주면 된다.

이제는 가정된 해의 미지수인 λ를 구하는 것이 미분방정식의 해를 구하는 것으로 되는데 λ를 구하는 기법에 대해서 설명하도록 한다.

다음과 같이 가정된 해를 1번 및 2번 미분하고 이 결과를 주어진 미분방정식에 대입한다.

$$y = e^{\lambda x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$$

[가정된 해의 미분]

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$y''+ay'+by = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

[가정된 해를 미분방정식에 대입]

$$\therefore \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

이와 같이 도출된 λ에 대한 2차 방정식을 미분방정식을 풀기 위한 **보조방정식**이라고 부르며 이를 푸는 것이 미분방정식의 해를 구하는 것으로 귀착된다.

이와 같이 미분방정식의 해를 구하는 것에도 이러한 기본적인 2차 방정식의 해를 구하는 기법이 적용되는데 이는 수학의 모든 과정이 상호 연계되어 있으며 기본적인 사항들에 대한 개념의 정립이 얼마나 중요한지 보여주는 예로서 기술자들은 항상 기본적인 개념들에 대한 공부를 게을리 하지 않아야 함이 여기에 있다고 볼 수 있다.

먼저 이 기법을 잊어버린 독자들의 기억을 돕는 의미에서 중학교부터 배운 다음의 2차 방정식의 해를 구하는 기법을 먼저 설명하도록 하는데 이를 우리는 **2차 방정식의 근의 공식**이라고 부르는 것이다.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (a \neq 0)$$

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

앞의 2차 방정식의 해를 구하는 기법을 2차 미분방정식에서 나타난 λ에 대한 2차 방정식의 해를 구하는데 그대로 적용하면 다음과 같다.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

이렇게 해를 가정하고 가정된 해로부터 도출된 λ에 대한 2차 방정식을 풀어서 λ를 구하여 가정된 해에 대입하는 과정을 거치면 된다.

$$y'' + ay' + by = 0 \Rightarrow (y = e^{\lambda x})$$
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

[2차 미분방정식의 해]

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

그런데 원래 가정할 때는 1개 항의 값을 갖는 것으로 가정했는데 갑자기 2개 항의 값이 합성된 것을 해로 하는 것에 대하여 의문을 가질 수 있는데 이는 미분방정식이 갖는 특성으로 이해하기 바란다.

즉, 위에서 구한 각각의 해도 해가 되지만 2개 항의 합으로 표현된 해도 대입해 보면 해가 되기 때문에 이렇게 2개 항의 합으로 나타낸 해를 일반 해로 취급하는 것을 알아두기 바라며, 위에서 구한 2개 항으로 나타낸 일반 해를 주어진 미분방정식에 대입하여 직접 확인해 보는 것은 독자들의 몫으로 남긴다.

그런데 우리가 2차 방정식을 배울 때 근의 공식을 적용하는 것은 어떠한 경우에도 가능하지만 식에서 느낄 수 있듯이 그 과정이 약간 복잡한 것이 단점인데 만약 주어진 2차 방정식이 인수분해 된다면 굳이 복잡한 근의 공식을 적용하지 않아도 되는데 이러한 예를 몇 가지 들어보도록 한다.

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

[인수분해를 적용한 풀이과정]

$$\lambda = -1$$
$$\lambda = -2$$

$$\therefore\ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

[근의 공식을 적용]

$$\lambda_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1,\ \lambda_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\therefore\ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

위에서 알 수 있는 바와 같이 그 결과는 동일하며 인수분해를 적용한 기법이 좀더 간략하기 때문에 많이 이용되는 것이다.

인수분해 기법을 적용한 예를 한가지 더 들어본다.

$$y'' + 8y' + 15y = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = -5$$

$$\therefore\ y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-5x}$$

1.5.2 근의 형태에 따른 특성의 이해

우리가 2차 방정식을 배울 때 근의 공식의 근호 (Root) 안의 부호에 따라 근의 형태가 결정되는 것을 알았는데 이 근호 안에 들어있는 수식을 판별식이라고 부르는데 이 판별식은 미분방정식에도 동일하게 적용된다.

다음과 같은 2차 방정식의 근의 공식은 다음과 같이 유도됨을 앞에서 설명했는데 마지막의 **D**라고 한 부분이 바로 판별식이다.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

이 판별식의 값이 양 (+)의 값인지, 0인지, 음 (-)의 값인지에 따라 근의 형태가 달라지며 또한 물리적인 의미도 달라진다.

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

[서로 다른 2개의 실근을 갖는 경우]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

[1개의 중근을 갖는 경우]

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

[서로 다른 2개의 허근을 갖는 경우]

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

미분방정식을 풀기 위한 특성방정식의 경우에도 동일한 개념이 적용되는데, 서로 다른 2개의 실근을 갖는 경우에는 앞의 예에서 이미 보여졌으므로 생략하도록 하며, 다음과 같이 미분방정식이 중근을 갖는 경우와 서로 다른 2개의 허근을 갖는 경우에 미분방정식의 해가 어떻게 될 것인지 알아본다.

$$y'' + 2y' + y = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

[중근을 갖는 경우의 미분방정식]

$$\lambda = -1$$

이 경우에 미분방정식의 일반 해는 다음과 같이 결정한다.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

즉, 중근을 가지면 두 해가 동일한 것이 되기 때문에 1차 종속형이 되며 의미가 없어지게 되는데 이를 피하기 위해 위와 같이 하나의 해 앞에 변수인 x를 곱해주어야 하는데 이렇게 하면 주어진 정말로 미분방정식의 해가 되는지 직접 대입하여 확인해 본다.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$$

$$y'' = c_1 e^{-x} - c_2 e^{-x} - c_2 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$\begin{aligned} & y'' + 2y' + y \\ &= c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 2(-c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}) + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

위와 같이 해가 됨을 확인할 수 있다.

여기서는 이와 같이 해를 구하는 방법을 설명했지만 앞으로 설명할 라플라스 변환을 배우게 되면 자연스럽게 이러한 형태로 해가 결정됨을 알 수 있다.

이번에는 다음과 같이 서로 다른 허근을 갖는 경우에 대하여 알아본다.

$$y'' + 4y' + 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm i$$

이 경우에 해는 다음과 같이 표현된다.

$$y = c_1 e^{-2x} e^{ix} + c_2 e^{-2x} e^{-ix}$$

$$= e^{-2x}(c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix})$$

그런데 서로 다른 2개의 허근을 갖는 경우에는 위와 같이 나타내지 않고 삼각함수의 지수 형태인 오일러의 식을 적용하여 다음과 같이 나타낸다.

삼각함수의 오일러에 식에 대한 내용은 필자가 작성한 "삼각함수" 편이나 다른 수학서적을 참고하기 바란다.

$$e^{ix} = \cos\ x + i\sin\ x \rightarrow (1)$$
$$e^{-ix} = \cos\ x - i\sin\ x \rightarrow (2)$$

[오일러의 식]

$$\cos\ x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \because\ [(1) + (2)]$$
$$\sin\ x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \because\ [(1) - (2)]$$

앞의 예에서 구한 서로 다른 2개의 허근을 갖는 경우에는 일반적으로 해를 다음과 같이 정의한다.

$$y = e^{-2x}(c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix})$$

$$= e^{-2x}(A\cos\ x + B\sin\ x)$$

그리고 다시 한번 언급하지만 여기에 나와 있는 상수들은 해당 미분방정식으로 모델링이 된 물리계의 초기조건 (Initial Condition) 및 경계조건 (Boundary Condition)을 대입하여 구한다.

하지만 미분방정식의 해는 초기조건과 경계조건이 포함된 라플라스 변환을 이용하면 모든 상수는 한꺼번에 정해지게 되어 간단하다.

1.5.3 근의 형태에 대한 물리적 개념의 이해

앞에서 미분방정식을 이해하는 의미에서 예를 들었지만 사실 물리계의 수학적인 모델링으로 만들어 지는 미분방정식의 근은 물리적인 의미가 있어야 한다.

즉 어떤 회로의 전류를 구하는 미분방정식의 경우에는 전류가 무한히 큰 값을 가질 수는 없기 때문에 지수형식으로 나타날 근의 지수부분이 음의 값을 가져야 하는 것이 예가 될 수 있다.

이는 매우 중요한 개념이며 정확한 이해를 위해 예를 들어보도록 한다.

어떤 전기회로의 전류방정식이 다음과 같은 근을 갖는 것으로 나타났다고 한다.

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{\frac{R}{L}t})$$

그런데 이 전류는 시간의 경과에 따라 점차 마이너스 값으로 증가하여 결국 무한대의 값을 갖는 것으로 된다.

무한대의 것을 가진다는 것이 물리적으로 가능한가?

물론 수학적으로는 가능하지만 물리적으로는 불가능하다.

따라서 상기 전류를 구하기 위한 미분방정식은 잘 못 수립되었음을 알 수 있다.

결국 물리적으로 의미를 갖는 근이 되기 위해서는 미분방정식의 근에서 지수부분이 마이너스의 부호를 가져야 함을 알 수 있다.

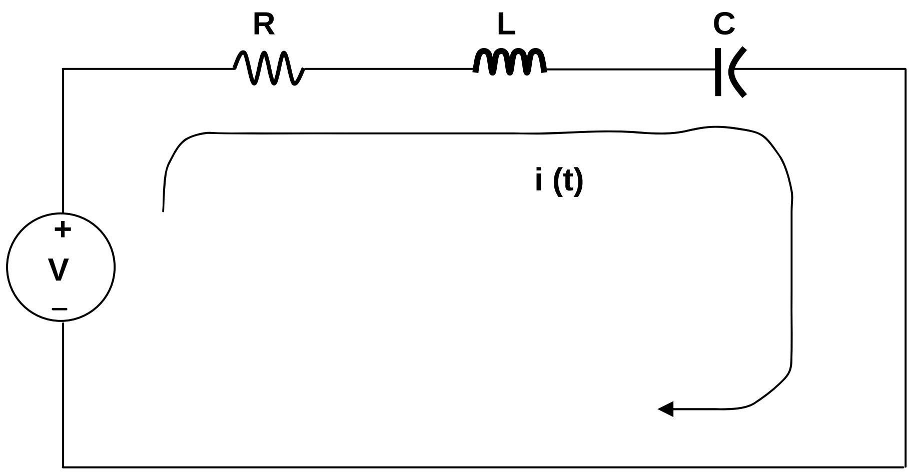
따라서 앞의 미분방정식의 근의 형태는 아마도 다음과 같이 될 것이다.

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

이와 같이 음의 부호를 갖는 지수부분의 물리적인 의미는 전기회로나 기타의 물리계에 입력을 가할 경우 그에 상응하는 출력이 나타나기까지의 과도현상을 설명하는 것이며 과도현상은 시간의 경과에 따라 반드시 소멸하여야 한다.

이는 모든 물리계가 외부로부터 충격에 대하여 본래의 성질을 유지하고자 하는 고유의 특성을 설명하는 것으로 이를 물리계의 관성이라고 한다.

이와 같은 개념을 가지고 다음의 전기회로의 전류방정식의 근의 형태와 과도현상이 소멸해 가는 시간적인 관계를 알아보도록 한다.



[직류 구동원을 갖는 R-L-C 직렬회로]

상기 회로의 전류방정식은 다음과 같은 미분방정식으로 표현된다.

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt = V$$

이를 2계의 미분방정식으로 만들기 위해 양변을 한번 더 미분하고 앞에서 기술한 방법에 의하여 근을 구해 보도록 한다.

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0 \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

위에서 R, L, C는 각각 전기소자인 저항, 인덕턴스, 커패시턴스의 값으로써 음의 값을 가질 수 없다는 것을 확인해 둔다.

이제 앞에서 설명한 2차 방정식의 근을 구해서 전류의 시간적인 변화를 알아 보도록 한다.

$$\lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$if \rightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 \rangle \frac{4}{LC}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$if \rightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 = \frac{4}{LC}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L}}{2}$$

$$if \rightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 \langle \frac{4}{LC}$$

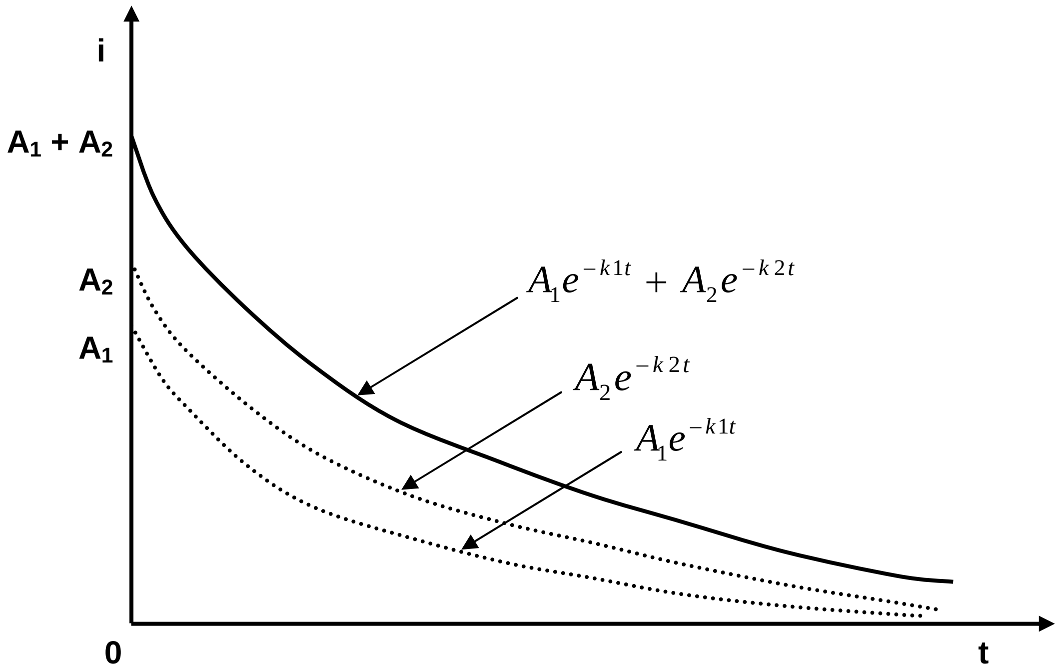
$$\lambda_1 = \frac{-\frac{R}{L} + j\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}, \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - j\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

한가지 알고 넘어가야 하는 사항은 서로 다른 실근 (Two Real Roots)을 갖는 경우에 근호 앞의 크기가 근호를 풀어낸 값의 크기보다 크게 될 것이므로 두 근 모두 마이너스 값을 갖는 것을 알 수 있으며 다음과 같이 된다.

$$i(t) = A_1 e^{-k_1 t} + A_2 e^{-k_2 t}$$
$$k_1 = -\lambda_1, k_2 = -\lambda_2$$

[서로 다른 두 실근]

따라서 위의 회로에서 형성되는 전류는 시간에 따라 다음과 같이 변화한다.



[R-L-C 직렬회로 전류의 시간적 변화 (두 실근의 경우]

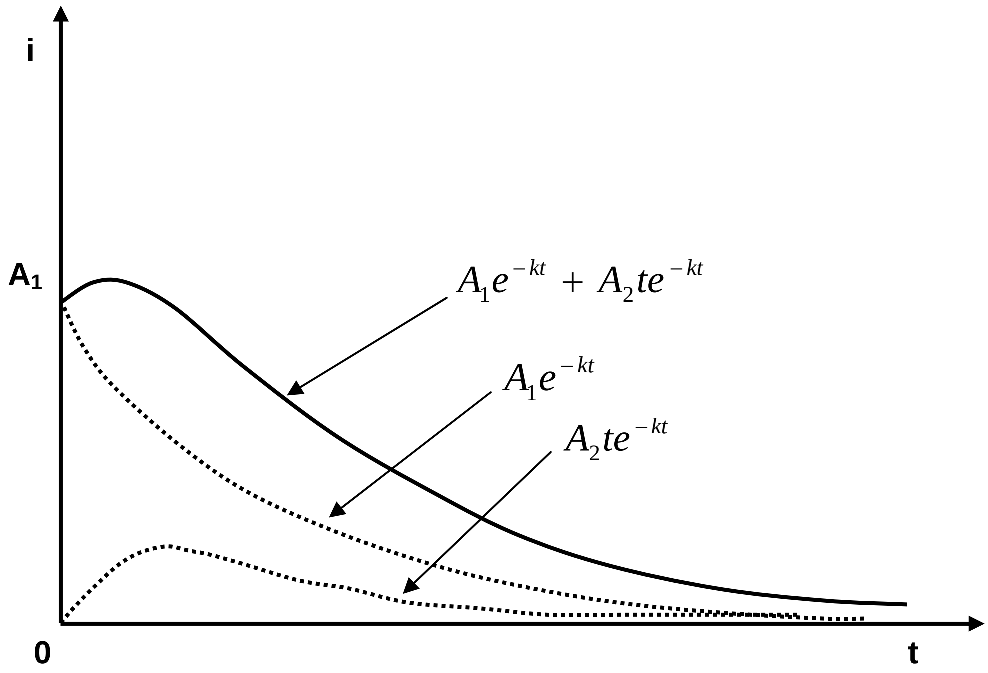
미분방정식을 풀기 위한 특성방정식인 2차 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우에는 과도현상으로 나타난 응답이 빨리 사라지기 때문에 **과제동 (Over Damping)**이라고 한다.

이번에는 특정방정식이 중근 (Double Root)을 갖는 경우를 살펴보도록 한다.

앞에서도 언급했듯이 두 근이 같은 값을 중근의 경우 선형종속 관계를 피하기 위해 다음과 같이 하나의 근에 변수인 “t”를 곱해주는 것을 기억하기 바란다.

$$i(t) = A_1e^{-kt} + A_2te^{-kt}$$

$$k = -\lambda = \frac{R}{2L}$$



[R-L-C 직렬회로 전류의 시간적 변화 **(**중근의 경우**)]**

중근의 경우에는 위의 그림과 같은 전류의 변화를 가지게 되는데 그래프에서 알 수 있는 바와 같이 과도현상이 곧바로 감쇠하지 않고 작은 구간에서 약간 상승하였다가 감소하는 것을 볼 수 있는데 이는 약간의 진동부분이 나타난 것으로 회로의 전류응답이 진동하기 시작하는 임계점이라는 의미에서 이와 같은 감쇠를 **임계제동 (Critical Damping)**이라 한다.

즉 회로의 정수인 R, L,C의 값을 조정하여 위의 임계제동의 값을 넘도록 하면 특성방정식이 더 이상 실근을 갖지 못하며 서로 다른 두개의 복소수 근을 갖는 영역으로 넘어가게 된다.

이번에는 특성방정식이 서로 다른 두개의 복소수의 근 (Two Complex Roots)을 갖는 경우를 살펴보자.

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$= A_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + A_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$
$$\lambda_1 = \alpha + j\beta \Rightarrow \alpha = -\frac{R}{2L}$$
$$\lambda_2 = \alpha - j\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$$

그런데 2차 방정식이 서로 다른 복소수의 근을 갖는 경우 반드시 허수부분의 부호가 다른 켤레 (Conjugate) 형태로 나타나게 된다.

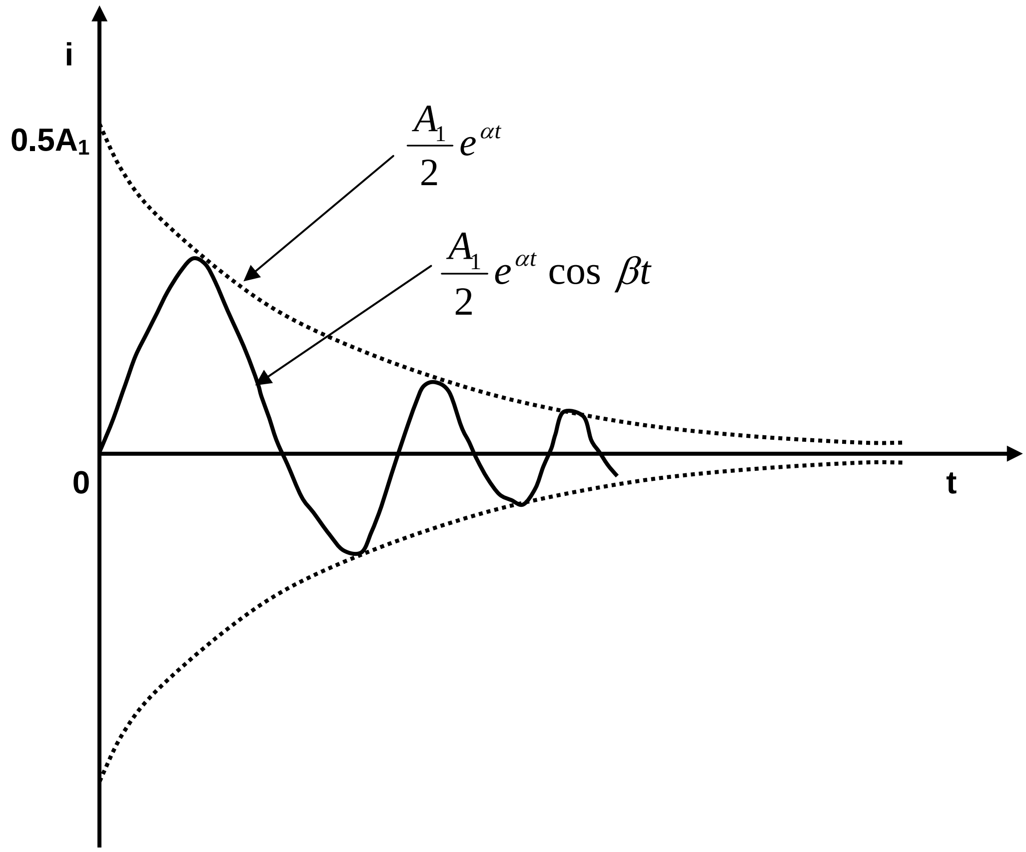
그리고 경계조건이나 초기조건을 적용하여 근의 계수인 A_1과 A_2를 구하여야 하지만 이렇게 해서 구하면 이 둘이 통상 같은 값을 갖는 동일한 특성이 있는데 이를 주목하면 미분방정식의 해는 다음과 같이 될 것이다.

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$= A_1 (e^{(\alpha + j\beta)t} + e^{(\alpha - j\beta)t}) \Rightarrow (\because A_1 = A_2)$$
$$= A_1 (e^{\alpha t} e^{j\beta t} + e^{\alpha t} e^{-j\beta t})$$
$$= A_1 e^{\alpha t} (e^{j\beta t} + e^{-j\beta t})$$
$$= \frac{A_1}{2} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

앞에서도 언급했지만 위의 수식 전개과정에서 적용한 아래의 삼각함수를 지수 형태로 표현한 오일러의 정리를 기억하기 바란다.

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

[삼각함수의 지수표현]



[R-L-C 직렬회로 전류의 시간적 변화 **(**복소수 근의 경우**)]**

앞에서 구한 회로전류의 응답곡선은 위 그림과 같이 진동하면서 점차로 감소하여 소멸해 가는 것이다.

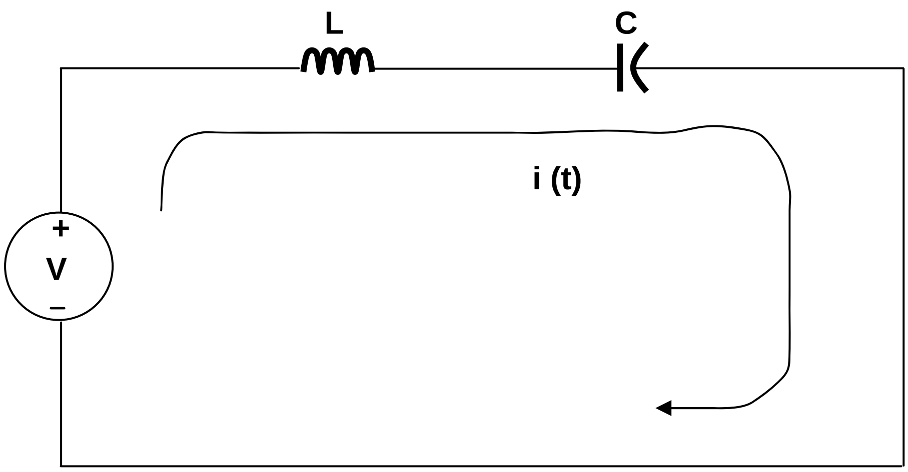
이러한 경우를 과도현상이 앞의 두 경우보다 상대적으로 길게 지속된다는 의미에서 **부족제동 (Under Damping)**이라고 한다.

참고로 위 전류의 식에서 나타난 α는 응답의 감소형태를 결정하는 인자로서 감쇠계수 (또는 제동계수 Damping Constant) β는 응답전류의 파형을 결정하는 인자로서 위상계수 (Phase Constant)라고 부른다는 것을 알아두기 바란다.

이 개념은 제어대상의 과도현상에 민감한 영향을 받는 자동제어 이론 (특히 비례, 미분, 적분제어 : PID Control)에 가장 기본적으로 활용됨은 물론 어떤 형태의 2차 미분방정식을 풀어 그 해를 도식적으로 이해하는데 아주 유용하다.

참고로 앞의 회로에서 저항이 없는 직류 구동원을 갖는 L-C 직렬회로의 경우에는 아주 흥미로운 현상이 발생하게 되는데 이를 알아보고 넘어가도록 한다.

물론 물리적으로 모든 도체에는 저항이 필연적으로 존재하기 때문에 이런 전기회로를 구현하기는 불가능하지만 매우 작은 저항을 가지는 도체의 경우 무시할 수 있기 때문에 공학적으로는 의미를 갖는 회로의 구성은 가능하다.



[직류 구동원을 갖는 L-C 직렬회로]

위 회로의 전압방정식 및 그 해인 전류는 다음의 과정을 통해 구해진다.

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = V \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{1}{LC}i = 0$$

$$\lambda^2+\frac{1}{LC}=0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{1}{LC}$$

$$\lambda = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\therefore\ i(t) = A_1 e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} + A_2 e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

이제 초기조건을 알면 전류의 상수인 A_1과 A_2를 구할 수 있는데 초기조건은 회로의 상태 및 몇 가지의 기본적인 가정을 통해 쉽게 알아낼 수 있다.

먼저 구동전원이 인가되기 전에 인덕턴스의 자기에너지와 커패시턴스의 정전에너지는 없다고 볼 수 있으므로 시간 **“t=0”**에서 전류 **“i=0”**이 될 것이다.

이와 같이 초기조건을 알아 냈으므로 이제는 전류를 미분에 대한 초기조건을 다음과 같이 찾아낼 수 있다.

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} idt = V$$

$$i(0) = 0$$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} idt = 0$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}\int_{-\infty}^{t} idt = \frac{V}{L}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}+\frac{1}{LC}\int_{-\infty}^{0} idt = \frac{V}{L}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{V}{L} \Rightarrow \left(\because \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} idt = 0\right)$$

위 초기조건을 앞에서 구한 전류의 상수인 A_1과 A_2를 구하는데 이용한다.

$$i(t) = A_1 e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} + A_2 e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{di}{dt} = j\frac{1}{\sqrt{LC}}A_1 e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} - j\frac{1}{\sqrt{LC}}A_2 e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = j\frac{1}{\sqrt{LC}}A_1 - j\frac{1}{\sqrt{LC}}A_2 = \frac{V}{L}$$

$$A_1 - A_2 = \frac{V}{L}\frac{\sqrt{LC}}{j} = \frac{V}{j}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

위와 같이 정리해 놓고 A_1과 A_2를 구하면 다음과 같이 될 것이다.

$$A_1 = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{V}{2j}$$
$$A_2 = -\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{V}{2j}$$

따라서 구하고자 하는 전류응답은 사인파가 되는 것을 알 수 있다.

$$i(t) = A_1 e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} + A_2 e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$
$$= \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{Ve^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}}}{2j} - \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{Ve^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}}{2j}$$
$$= \sqrt{\frac{C}{L}}V\left(\frac{e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} - e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}}{2j}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{C}{L}}V \sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

그런데 분명히 구동전원이 직류인데 어떻게 사인파의 전류가 발생할 수 있는가에 대한 의문이 생길 것인데 그래서 아주 흥미로운 현상이라고 말했던 것이다.

이는 인덕턴스와 커패시턴스라는 기본 전기소자의 물리적인 특성에 기인하는 것이라고 생각하는데 필자가 생각하는 개념은 다음과 같다.

즉 전자에너지의 충전이 되어있지 않은 L-C 직렬회로에 최초 구동전원을 인가하면 커패시턴스에 급격한 돌입 충전전류가 유입하려고 할 것이고 이를 인덕턴스의 급격한 전류의 변화를 방해하는 특성에 의해 억제될 것이다.

이러한 인덕턴스의 물리적인 특성은 마치 물리계의 관성과 같은 역할을 가지고 있어 초기에 급격한 돌입전류도 막아주지만 충전이 급격하게 완료되는 것 또한 막아줄 것이다.

따라서 커패시턴스에는 구동원인 직류전원보다 높은 전압이 유도되기 때문에 충전이 완료되면 커패시턴스에 축적된 전하를 방출하면서 전원측으로 전류를 흐르게 하며, 이와 같은 현상이 반복되어 교류전류가 흐르는 것으로 생각된다.

실제로 현장에서 많이 사용되는 역률 개선용 콘덴서에 직렬로 연결된 리액터의 작용으로 콘덴서의 단자전압이 전원의 인가전압보다 높아지는 것을 볼 수 있는데 이는 앞에서 설명한 것과 같은 개념이며, 또한 이 직렬 콘덴서는 급격한 돌입전류의 제한과 특정고조파의 필터역할을 수행하게 되는 것을 참고로 알아두기 바란다.

이와 같은 물리적인 개념을 이해하면서 구해진 전류를 이용하여 인덕턴스 및 커패시턴스에 나타나는 전압 및 주파수, 임피던스와 같은 몇 가지 기본적인 사항에 대하여 알아보도록 한다.

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}V \sin\frac{t}{\sqrt{LC}} \quad [\mathrm{A}]$$

$$\text{Angular Velocity (w)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

$$\text{Frequency (f)} = \frac{\mathrm{w}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

$$\text{Impedance} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \; [\Omega]$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = L\sqrt{\frac{C}{L}}V\frac{1}{\sqrt{LC}}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$$= V\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} \; [\mathrm{V}] \Rightarrow \text{(Inductor Voltage)}$$

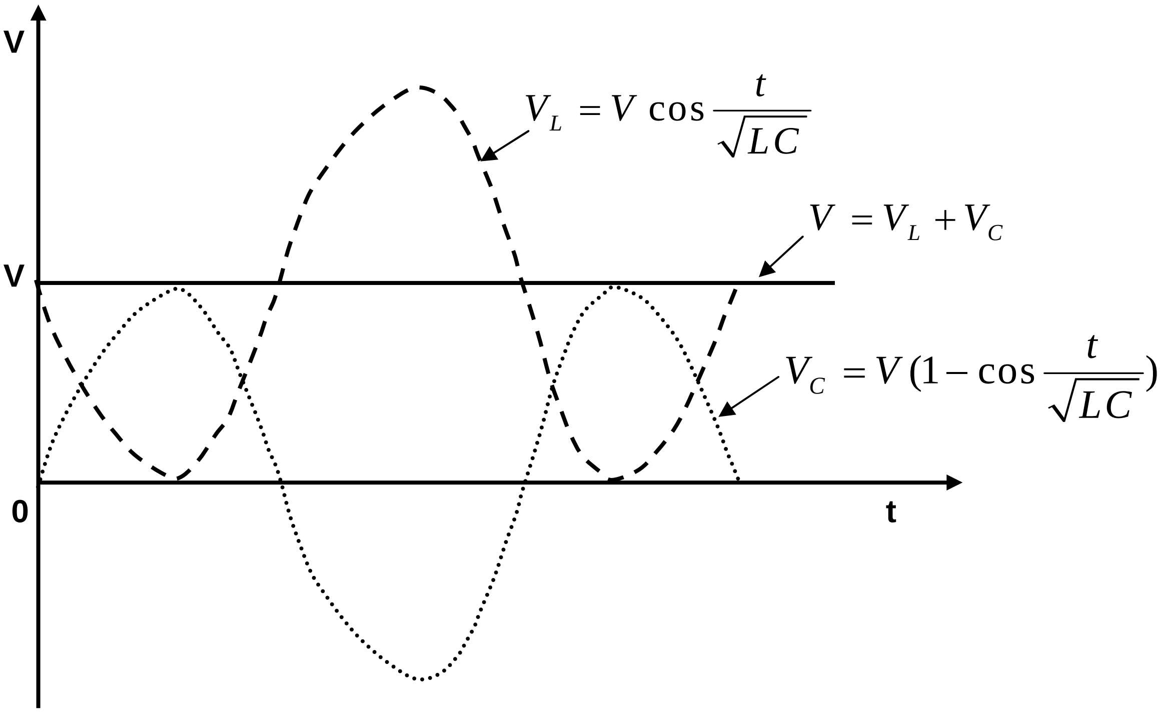
$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i dt = -\frac{1}{C}\sqrt{\frac{C}{L}}V\sqrt{LC}[\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}]_0^t$$

$$= V(1-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}) \; [\mathrm{V}] \Rightarrow \text{(Capacitor Voltage)}$$

$$V = V_L + V_C = V\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + V(1-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

$$= V \; [\mathrm{V}] \Rightarrow \text{(Total Circuit Voltage)}$$

위에서 살펴본 각 소자에 나타나는 전압과 회로 전체의 전압에 대한 개념을 다음과 같이 그림을 통해서 이해하도록 한다.



[L-C 직렬회로의 각 소자에 나타나는 전압의 개념]

위 그림을 통해서 알 수 있듯이 회로의 전류는 사인파의 형태를 가지며 각 소자에 나타나는 전압도 역시 사인파의 형태를 가지지만 전체의 회로전압은 두 소자의 전압을 합한 것으로써 직류 전원전압과 동일한 값을 가지게 된다.

본 회로는 직류전원을 사용하여 사인파를 만들어 내는 기본적인 회로이며 전자부품에 내장되는 발진회로로 사용되는 것이 대표적이다.

식에서도 알 수 있는 바와 같이 발진회로의 주파수는 인덕턴스와 커패시턴스를 조정하여 원하는 값을 얻어낼 수 있는 특징이 있다.

앞에서 설명한 2차 미분방정식의 해에 대한 특성을 요약하면 다음과 같다.

상수계수를 갖는 2차 미분방정식은 반드시 그 해가 지수함수를 포함한 형태로 나타나게 되는데 여기서 나타난 지수부분의 물리적인 의미는 과도현상을 표현하는 것으로 이해하면 된다.

따라서 이 과도현상은 일정시간이 경과하면 소멸하여 정상상태로 안정하게 되어야 하므로 반드시 근의 지수부분이 마이너스 값이어야만 물리적인 의미를 갖는 해가 되는 것이며 또한 근의 형태에 따라 과도현상의 소멸시간이 결정된다.

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는 경우에는 과도현상이 급속히 소멸하게 되므로 이를 과제동 (Over Damping)이라 하고 중근을 갖는 경우에는 과도현상에 진동이 발생하기 직전의 상태인 임계제동 (Critical Damping)이라 하고 서로 다른 두 개의 복소수 근을 갖는 경우에는 과도현상이 진동하면서 소멸시간이 지연되는 부족제동 (Under Damping)이라고 한다.

마지막으로 저항이 없는 L-C 직렬회로의 경우에는 사인파의 응답이 되는 것과 이러한 회로가 전자회로에서 발진회로로 활용되는 것도 알아두기 바란다.

1.6 2차 비 제차 방정식의 풀이기법

1차 미분방정식에서 설명했듯이 비 제차 방정식이란 다음과 같이 미분방정식의 우변인 **“r(x) ≠ 0”**인 형태를 의미한다.

$$y''+f(x)y'+g(x)y = r(x)$$

이때 우변의 함수인 r(x)를 전기회로를 다루는 경우에는 강제 구동전원, 기계적인 계통을 다루는 경우에는 외력이라고 부르며, 공통적으로 강제함수라고 한다.

상기 미분 방정식의 해는 우변의 강제함수의 형태에 따라 결정된다.

선형 2차 비 제차 미분방정식의 대표적인 풀이기법은 강제함수인 r(x)의 형태를 이용하여 적당한 해를 가정하여 주어진 미분방정식에 대입하고 가정된 해에 포함된 미정계수를 결정해 가는 미정계수 비교법을 사용하는 것이다.

이해를 돕기 위한 예를 하나 들어보자.

$$y''+3y'+2y = x^2$$

상기 미분방정식의 해는 r(x)의 형태와 유사한 함수일 것이라는 것은 직감적으로 눈치챌 수 있는 사항이기 때문에 다음과 같이 해를 가정한다.

$$y = ax^2 + bx + c$$

이와 같이 가정된 해를 주어진 미분방정식에 대입한다.

$$(ax^2 + bx + c)'' + 3(ax^2 + bx + c) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$
$$2a + 3(2ax + b) + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$
$$2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c = x^2$$
$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
$$6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$
$$2a + 3b + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{7}{4}$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

이렇게 구해진 해를 주어진 미분방정식에 대입하여 올바르게 계산되었는지 검산하면 되는데 이는 독자들이 직접 확인해보기 바란다.

이렇게 미정계수 비교법을 적용하기 위해 r(x)의 형태로부터 가정할 수 있는 해의 형태를 대표적인 것들만 요약하니 참고하기 바란다.

r(x)의 형태	가정할 수 있는 해의 형태
x^n	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \bullet\bullet\bullet + a_nx^n$
e^{ax}	$a_1e^{ax} + a_2e^{-ax}$
$\cos\omega t$	$a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t$
$\sin\omega t$	$a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t$

앞에서도 설명했지만 미정계수 비교법을 활용하기 위한 기법을 간략하게 요약하니 독자들은 적당한 예제를 만들어서 연습해 보기 바란다.

Step 1

주어진 미분방정식의 우변에 나타난 r(x)의 형태로부터 해를 가정한다.

Step 2

가정된 해를 주어진 미분방정식에 대입하고 좌변과 우변의 동일한 항의 계수를 비교하여 결정하여 해를 구한다.

Step 3

위에서 구한 해를 주어진 미분방정식에 대입하여 확인한다.

비 제차 2차 미분방정식의 형태는 다양하지만 작성자의 능력을 벗어나는 것이므로 이상과 같이 간략하게 마치며 이 자료의 뒷부분에서 설명할 라플라스 변환을 이해하면 상수계수를 갖는 2차 비 제차 방정식은 간단하게 된다.

2 미분방정식의 활용

처음에 언급했듯이 미분방정식을 이해하여야 하는 사유는 수학적으로 모델링된 물리현상을 풀어내는데 활용하기 위함이다.

따라서 몇 가지 일반적인 미분방정식을 예를 들어 풀어보고 우리가 관심을 가지고 있는 전기회로의 해석에 활용하는 방법을 설명하기로 한다.

2.1 미분방정식의 예제

먼저 다음과 같이 두 실근의 경우, 중근의 경우 복소수 근의 경우에 대한 미분방정식을 앞의 기법들을 적용하여 풀어보도록 한다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$y = ke^{\lambda x}$ 라고 가정하면

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2)ke^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = -1 \text{ or } \lambda = -2$$

$$\therefore\ y = A_1e^{-x} + A_2e^{-2x}$$

이번에는 중근을 갖는 경우를 살펴보자.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$
$$\lambda = -1 \text{ (Double Roots)}$$

$$i(t) = A_1 e^{-x} + A_2 x e^{-x}$$

서로 다른 두 복소수 근을 갖는 예는 다음과 같다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$
$$(\lambda + 2)^2 + 1 = 0$$
$$(\lambda + 2)^2 = -1$$
$$\lambda + 2 = \pm j$$
$$\lambda = -2 \pm j$$

$$\therefore i(t) = A_1 e^{(-2+j)x} + A_2 e^{(-2-j)x}$$
$$= e^{-2x}(A_1 \cos x + A_2 \sin x)$$

물론 앞에서도 설명을 하였지만 복소수의 근을 갖는 경우에는 서로 공액의 형태를 가지며 앞의 계수도 동일하여 사인이나 코사인으로 된다.

이것은 뒤에 설명하는 라플라스 변환을 설명하고 적용하는 과정에서 자연스럽게 이해할 수 있게 될 것이다.

2.2 초기조건을 알아내는 기법

사실 미분방정식의 풀이 기법을 공부하는 가장 중요한 목적은 현업에서 부딪치는 현상들에 대하여 미분방정식을 세우고 이를 해결함으로써 문제점을 개선하거나 설비를 증설하거나 효과적인 유지보수 등에 적용하기 위함이다.

따라서 앞에서 설명한 기법을 바탕으로 미분방정식을 실제로 풀기 위해서는 해에 포함된 미지수를 알아내어야 한다.

미지수는 주로 지수함수의 계수가 될 것이며 이를 알아내기 위해서는 초기조건이나 경계조건을 알아야 하는데 수학책에서는 미분방정식의 풀이를 자연스럽게 하도록 하기 위해 연습문제에서 초기조건을 주는 경우가 많다.

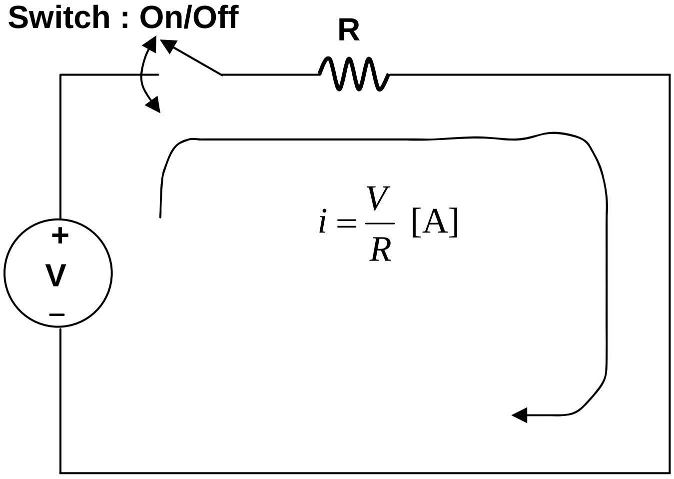
그러나 이는 수학책에서나 있을 수 있는 것이며 실제로는 이 초기조건을 해결하고자 하는 문제의 상태 및 특성 등을 이용하여 우리가 찾아내야 한다.

주로 전기 기술자들이 접하는 기본적인 회로를 바탕으로 전기소자의 특성을 활용하여 초기조건을 찾아내는 몇 가지 기법들을 설명하도록 한다.

2.2.1 기본적인 회로소자의 특성

전기회로를 구성하는 기본소자는 저항과 인덕턴스 및 커패시턴스가 대표적이며 이들의 특성이 초기조건을 결정하는 중요한 단서가 된다.

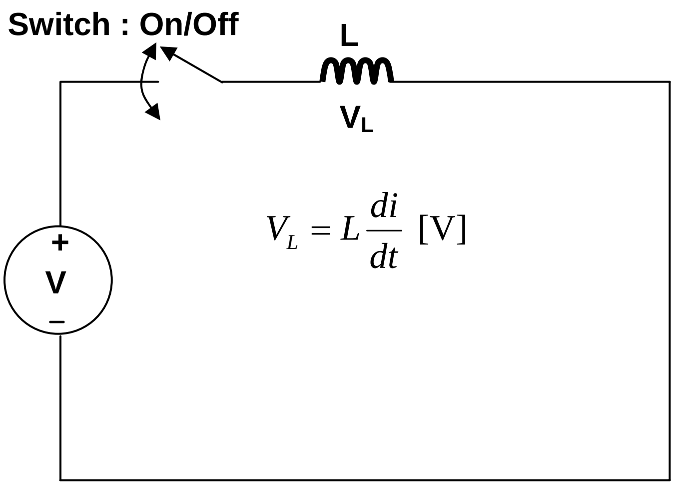
저항은 인가된 전압을 자신의 값으로 나눈 값만큼의 전류를 흐르게 하는 특성이 있으며 어떤 과도적인 현상을 수반하지 않는다.



[저항의 특성]

즉 스위치를 투입하는 순간 전류는 위의 회로와 같이 전압을 저항으로 나눈 값이 되며 스위치를 개방하는 순간 전류는 “0”이 된다.

인덕턴스는 전류의 급격한 증가 및 감소를 억제하는 성질이 있는데 이는 다음과 같이 인덕턴스에 걸리는 전압이 전류의 미분형태가 되는 것으로부터 알 수 있는 사항이다.



$$V_L = L\frac{di}{dt}\ [\mathrm{V}]$$

[인덕턴스의 특성]

인덕턴스에 전류가 인가되면 전류의 흐름을 반대하는 방향으로 전압을 유도하면서 전류의 흐름이 억제되어 전류의 변화는 허용되지 않는다.

만약 스위치를 닫기 전에 회로에 전류의 흐름이 없었다면 급격한 전류의 변화는 허용되지 않기 때문에 닫는 순간의 전류는 “0”이 된다.

또한 스위치를 개방하기전의 전류는 개방하는 순간에 그 값을 그대로 유지하는 성질이 있는 것이다.

즉 전류의 흐름이 정상상태로 도달하기 위해서는 일정한 과도현상을 수반한다는 것을 의미함을 이해하기 바란다.

이를 좀더 개념적으로 설명하면 다음과 같다.

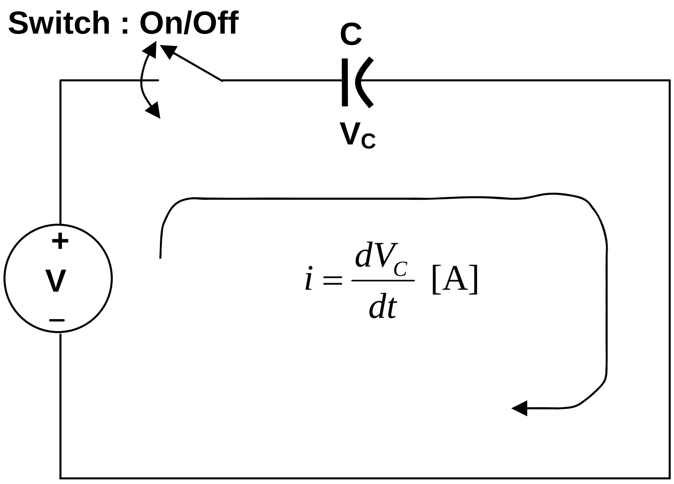
$$i\Big|_{t=0_-} = i\Big|_{t=0_+}$$ [인덕턴스의 특성]

위식에서 각 첨자 기호의 의미는 다음과 같다.

$t=0_-$: 스위치를 닫거나 열기 직전의 시간

$t=0_+$: 스위치를 닫거나 열기 직후의 시간

커패시턴스는 급격한 전압의 변화를 억제하는 성격이 있는데 이는 커패시턴스에 걸리는 전류가 전압의 미분형태가 되는 것으로부터 알 수 있다.



[커패시턴스의 특성]

이는 커패시턴스의 전압은 충전이 진행되면서 나타나게 되는 것이며 급격한 충전은 물리적으로 불가능하기 때문에 충전에 따른 일정한 과도현상이 나타난 후 정상상태로 안정하게 되는 것이다.

커패시턴스에 전류가 인가되면 충전이 시작되며 전압이 나타나는데 이는 큰 용기에 물을 담을 때 순간적으로 용기를 전부 채울 수 없는 것과 마찬가지이다.

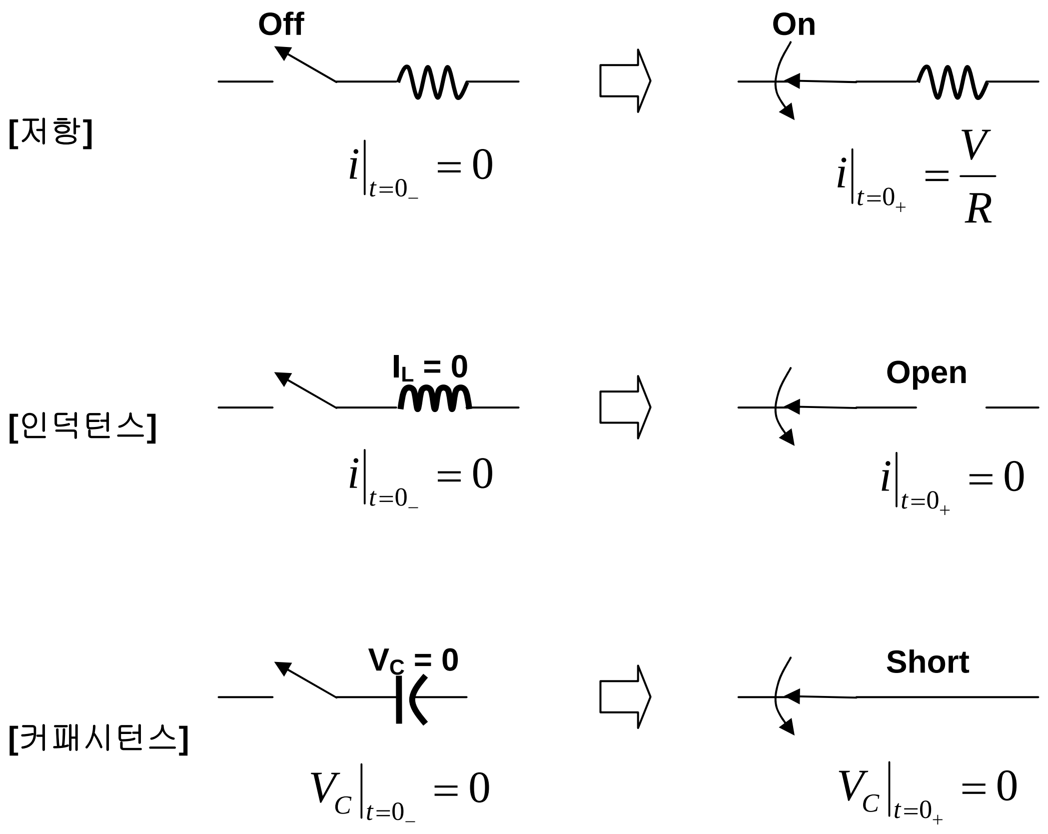
만약 스위치를 닫기 전에 커패시턴스에 충전이 없었다면 급격한 전압의 변화는 허용되지 않기 때문에 닫는 순간의 전압은 “0”이 된다.

따라서 인덕턴스의 경우와 마찬가지로 스위치의 조작직전과 직후의 전압은 일정하게 유지되는 다음의 성질이 있는 것이다.

$$V_C\big|_{t=0_-} = V_C\big|_{t=0_+}$$ [커패시턴스의 특성]

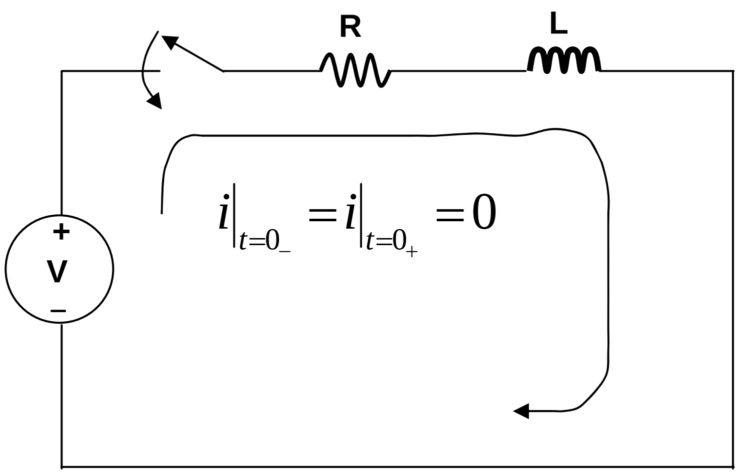
위에서 살펴본 기본 전기소자의 과도현상에 대한 특성은 미분방정식의 해를 구하기 위한 초기조건을 알아내는데 아주 유용한 도구이기 때문에 전기 기술자들이 반드시 알고 있어야 하는 개념이다.

앞의 설명은 다음과 같이 요약된다.



2.2.2 초기조건의 결정기법

이제 앞에서 설명한 기본소자의 특성을 다음과 같이 1차 미분방정식으로 모델링 되는 전기회로의 초기조건 결정에 활용하는 기법을 설명하도록 한다.



[R-L 직렬회로의 초기조건 결정**]**

통상 전원을 인가하기 위한 스위치를 닫기 전 전기회로는 안정상태 (즉, 전기의 흐름이 없는 상태)가 대부분이며 따라서 회로의 전류는 “0”일 것이다.

따라서 상기회로의 경우 인덕턴스의 영향으로 스위치를 닫는 순간 개방회로로 작용하여 전류는 “0”이 될 것이다.

스위치를 닫은 이후의 회로방정식은 다음과 같이 해가 구해진다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt + C\right]$$

[적분인자 기법을 활용함]

$$= \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

여기에 초기조건을 적용하여 미지수인 상수를 구하면 다음과 같다.

$$i(t) = \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

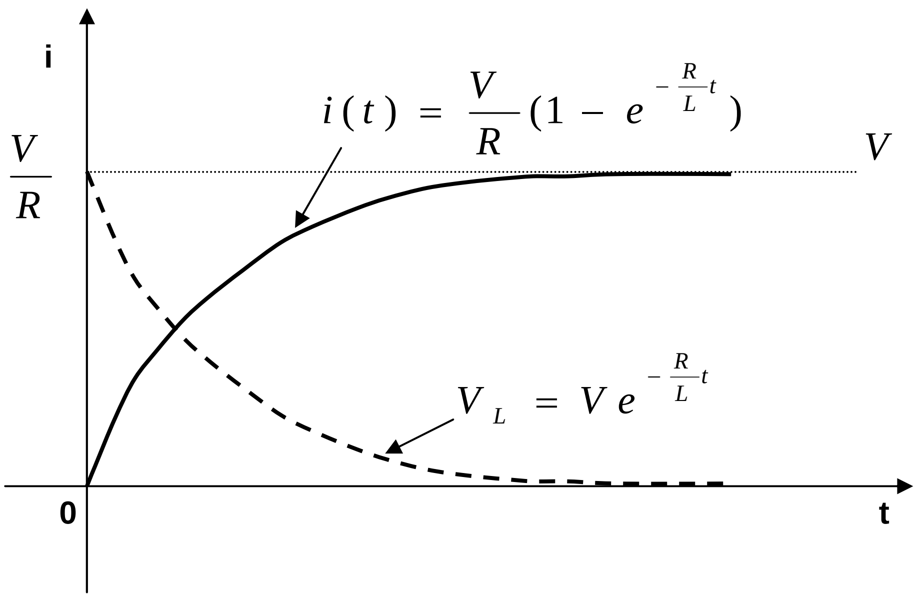
$$i(0) = \frac{V}{R} + C = 0$$

$$C = -\frac{V}{R}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

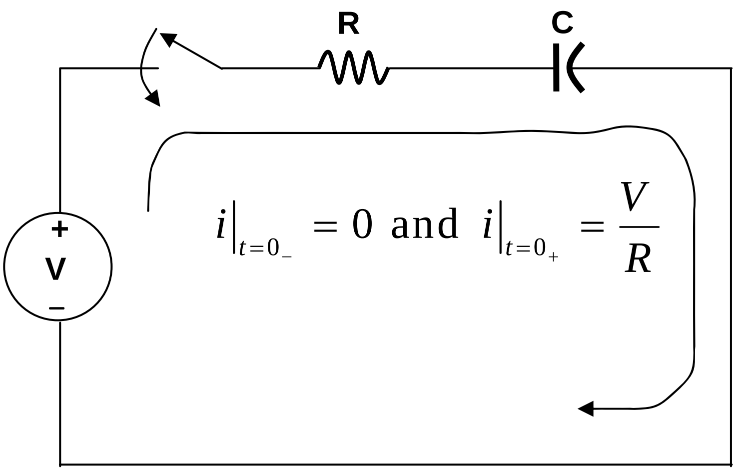
이 전류를 시간에 대한 그래프로 나타내면 다음과 같이 되며 엔지니어들은 반드시 이와 같이 그래프를 확인하는 습관을 가져야 함을 강조한다.

아래의 그래프는 인덕턴스의 급격한 전류변화에 대한 억제작용을 잘 보여주는 것으로서 스위치가 인가되는 순간은 개방회로로 작용하고 최종적으로는 직류전원에 대한 단락회로로 작용하는 물리적인 특성을 인덕턴스에 걸리는 전압인 **V_L**을 통해 보여주고 있다.



[R-L 직렬회로의 전류응답 곡선]

이번에는 다음과 같이 초기에 충전이 되어있지 않은 콘덴서와 저항으로 이루어진 R-C 직렬회로에 대한 초기조건을 알아본다.



[R-L 직렬회로의 초기조건 결정]

앞에서 설명한 대로 충전되어 있지 않은 콘덴서는 스위치를 닫는 순간에 전압이 “0”인 단락소자로 작용하기 때문에 초기조건은 그림에서 나타낸 바와 같이 구동전원을 저항으로 나눈 전류가 흐른다.

상기회로의 미분방정식과 그의 해는 다음과 같다.

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt = V \Rightarrow R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{RC}i$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \ln i = -\frac{1}{RC}t + k$$

$$i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t+k} = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

여기에 초기조건을 적용하여 미지수인 상수를 구하면 다음과 같다.

$$i(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

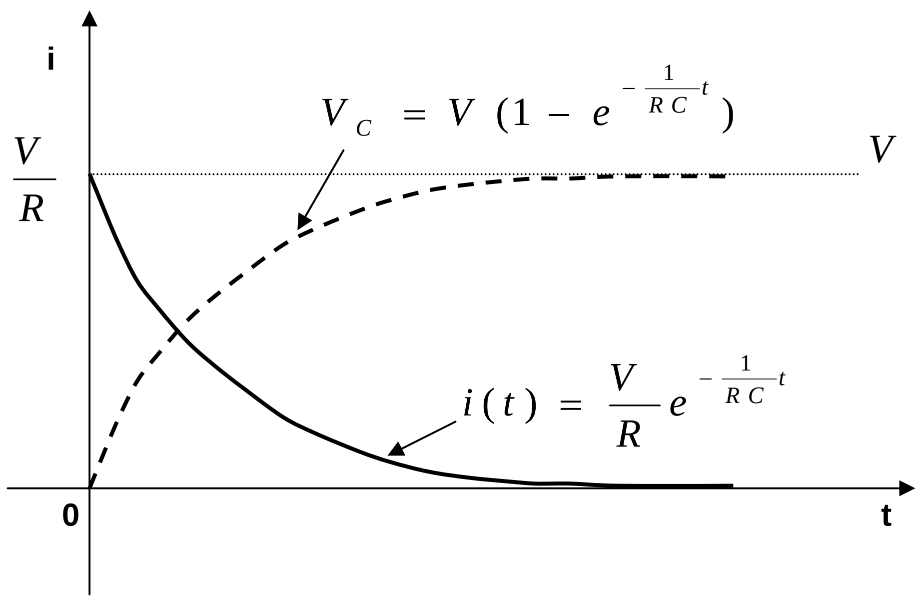
$$i(0) = K = \frac{V}{R}$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

이것을 그래프로 나타내면 다음과 같다.

아래의 그래프는 커패시턴스의 급격한 전압변화에 대한 억제작용을 잘 보여주는 것으로서 스위치가 인가되는 순간은 충전되어 있지 않았기 때문에 단락회로로 작용하고 최종적으로는 직류전원에 대한 개방회로로 작용하는 물리적인 특성을 커패시턴스에 걸리는 전압인 $\mathbf{V_C}$을 통해 보여주고 있다.

즉 정상상태에서 전원전압과 커패시턴스의 전압이 동일하게 됨으로써 **($\mathbf{V = V_C}$)** 회로에 전류가 흐르지 못하게 되는 것이다.

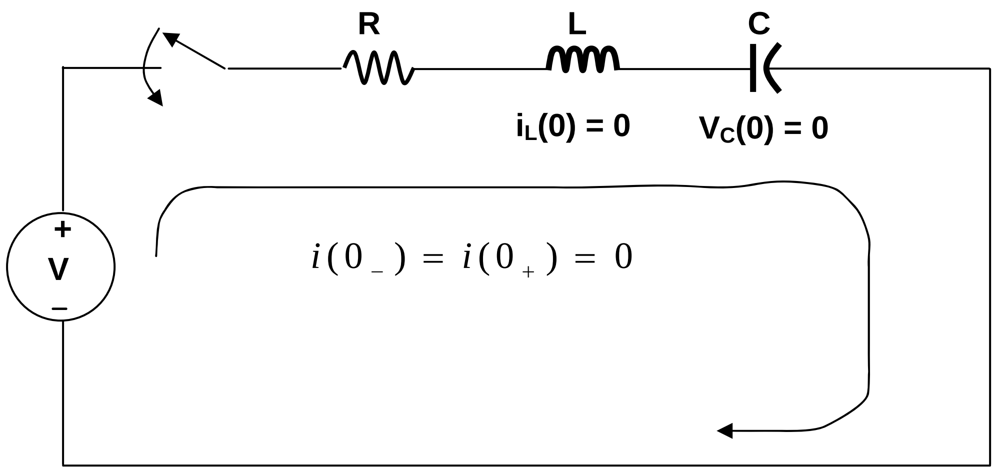


[R-C 직렬회로의 전류응답 곡선]

앞에서 살펴본 **R-L** 및 **R-C** 직렬회로는 1차 미분방정식의 형태가 되며 이 경우 미지수가 1개이므로 하나의 초기조건만 결정하면 되었다.

이번에는 다음과 같이 2차 미분방정식으로 표현되는 **R-L-C** 직렬회로의 초기조건을 결정하는 기법을 살펴보도록 한다.

아래 그림에 표기한 것처럼 초기에는 인덕턴스의 자기 에너지 및 커패시턴스의 정전 에너지가 없는 상태라고 하면 (즉, i_L**=0** 및 V_C**=0**) 스위치를 닫는 순간에는 인덕턴스의 작용으로 인해 개방회로가 되어 회로전류의 초기값은 “0”이 된다.



[R-L-C 직렬회로의 초기조건 결정**]**

따라서 상기 회로의 미분방정식은 다음과 같이 해가 구해진다.

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t idt=V \Rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

$$i(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t} \Rightarrow (\because \lambda 1, \lambda 2=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}})$$

그런데 앞의 미분방정식은 2개의 미지수를 포함하고 있기 때문에 이들을 결정하기 위해서는 당연히 2개의 초기조건이 필요하게 된다.

나머지 하나의 초기조건은 다음과 같이 회로의 미분방정식에서 앞에서 구해 놓은 첫번째 초기조건을 적용하여 구하는데 잘 이해하기 바란다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = V$$

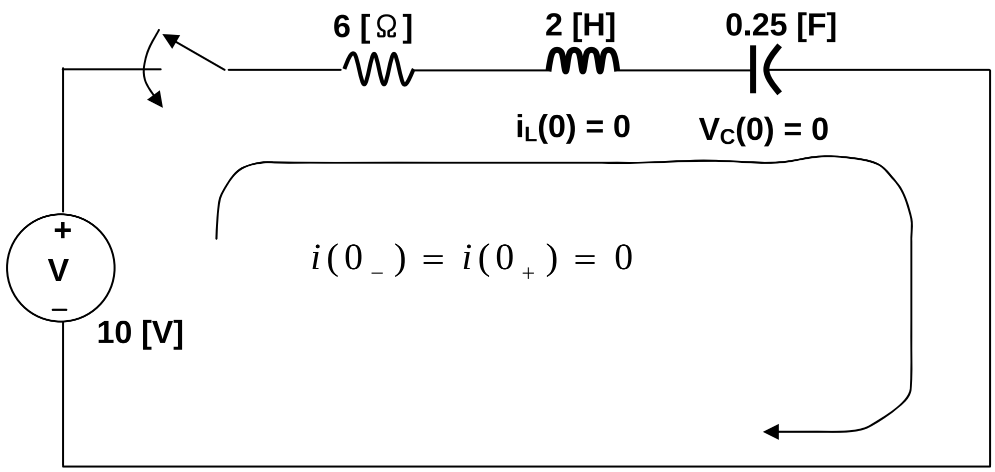
$$L\frac{di(0)}{dt} + Ri(0) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} idt = V$$

$$i(0) = 0 \quad \text{and} \quad V_C(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} idt = 0$$

$$L\frac{di(0)}{dt} = V \Rightarrow \therefore \frac{di(0)}{dt} = \frac{V}{L}$$

위와 같은 방법으로 다음 회로의 초기조건을 결정하여 전류응답을 구하여 본다.

실제로 인덕턴스를 2[H]로 하거나 커패시턴스를 0.25[F]으로 하는 것은 이러한 크기의 소자를 만드는 것이 물리적으로 불가능한 일이기 때문에 다음과 같은 회로를 구성할 수 없지만 이해를 돕기 위한 것임을 알아두기 바란다.



[R-L-C 직렬회로의 초기조건 결정]

먼저 회로의 미분방정식을 세우고 초기조건을 구한 후 미분방정식을 앞에서 설명한 방법으로 푼다.

그리고 지수함수의 계수인 미지수를 구해 놓은 초기조건을 적용하여 결정하면 구하고자 하는 전류의 응답이 다음과 같이 얻어진다.

$$2\frac{di}{dt} + 6i + \frac{1}{0.25}\int_{-\infty}^{t} i dt = 10$$

$$i(0) = 0 \text{ [A] and } \frac{di(0)}{dt} = \frac{10}{2} = 5 \text{ [A/sec]}$$

양변을 미분하면

$$2\frac{d^2i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + \frac{1}{0.25}i = 0 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

$$i(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

$$\frac{di}{dt} = -A_1e^{-t} - 2A_2e^{-2t}$$

초기조건을 적용

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -A_1 - 2A_2 = 5$$

$$A_1 = 5 \quad \text{and} \quad A_2 = -5$$

$$\therefore i(t) = 5e^{-t} - 5e^{-2t}$$

이 응답에 대한 그래프의 작성은 독자들에게 맡기며 앞에서 설명한 초기조건을 결정하는 과정은 매우 중요하며 유용한 사항이니 반드시 이해하기 바란다.

3 라플라스 변환의 이해

미분방정식을 푸는데 가장 효과적인 도구가 바로 지금부터 설명하는 라플라스 변환을 이용한 기법이다.

라플라스 변환이 정립될 때 미분방정식의 해를 구하기 위한 도구로 활용될 것을 염두에 두었는지 필자는 알지 못한다.

사실 라플라스는 프랑스의 위대한 수학자의 한 분으로서 Fourier의 제자라고 알려져 있으며 Fourier는 나폴레옹을 따라 정복전쟁을 수행한 수학자로서 전기 엔지니어에게 친숙한 Fourier 변환기법을 고안한 분으로 알려져 있다.

아마도 두 변환의 모습이 유사한 것으로 보아 제자인 라플라스가 Fourier의 기법을 좀더 확장한 개념이 아닌가 하는 추정을 필자는 하고 있다.

그리고 이 라플라스 변환이라고 하는 기법을 미분방정식의 해를 구하는데 적용한 사람은 다름 아닌 영국의 전기 엔지니어이자 물리학자 였던 Oliver Heaviside 라는 분이다.

이 Oliver Heaviside는 이론을 현업에 적용하는데 아주 뛰어난 능력을 가지고 있었던 분으로 알려져 있으며 이분은 엔지니어이다 보니 높은 수학적인 지식을 요하는 여러 가지 증명에 어려움을 가지고 있었던 것 같으며 이로 인해 당대의 수학자들로부터 어려움을 겪었던 적이 있다고 한다.

3.1 라플라스 변환의 정의

라플라스 변환은 다음과 같이 라플라스 변환을 의미하는 기호는 아래 식의 우변과 같고 좌변처럼 적분식으로 정의된다.

$$\pounds\{ f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad \textbf{[라플라스 변환의 정의식]}$$

위와 같은 정의식을 보면서 도대체 이를 어떻게 활용할 수 있을 것인지 필자도 맨 처음 공업수학을 배울 때 궁금함과 어려움을 느꼈던 적이 있다.

사실 이 라플라스 변환은 전기 엔지니어들이 반드시 이해하고 활용하여야 하는 가장 기본적인 사항임을 밝혀두며 차근차근 이를 설명해 가도록 한다.

이제 위의 정의식을 가지고 몇 가지 예를 들어 이해를 돕도록 하고 이를 바탕으로 라플라스 변환의 기본적인 성질에 대해서 알아보도록 한다.

먼저 기본적인 함수들의 라플라스 변환에 대하여 알아보자.

$$f(t) = k \Rightarrow k \ : \text{constant}$$

$$\pounds\{f(t)\} = \pounds\{k\} = \int_0^\infty ke^{-st}dt$$

$$= \left[-\frac{k}{s}e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{k}{s}$$

$$f\{t\} = t$$

$$\pounds\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \int_0^\infty t(-\frac{1}{s}e^{-st})'dt$$

$$= \left[-\frac{t}{s}e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

$$f\{t\} = t^2$$

$$\pounds\{t^2\} = \int_0^\infty t^2e^{-st}dt = \int_0^\infty t^2(-\frac{1}{s}e^{-st})'dt$$

$$= \left[-\frac{t^2}{s}e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty 2te^{-st}dt$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{2}{s^3} \Rightarrow (\because \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{s^2})$$

$$f\{t\} = t^3$$

$$\pounds\{t^3\} = \int_0^\infty t^3e^{-st}dt = \int_0^\infty t^3(-\frac{1}{s}e^{-st})'dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{s}e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty 3t^2e^{-st}dt = \frac{3}{s}\int_0^\infty t^2(-\frac{1}{s}e^{-st})'dt$$

$$= \left[-\frac{3t^2}{s^2}e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{3}{s^2}\int_0^\infty 2te^{-st}dt = \frac{6}{s^4} = \frac{3\times 2}{s^4}$$

이와 같이 t의 거듭제곱을 계속 해 나가면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$f(t) = t^n \Rightarrow (n = 0, 1, , \ldots)$$

$$£\{f(t)\} = £\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$$
$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$n = 0$일 경우

$$£\{t^0\} = £\{1\} = \frac{0!}{s^1} = \frac{1}{s} \Rightarrow (\because 0! = 1)$$

$n = 1$일 경우

$$£\{t^1\} = £\{t\} = \frac{1!}{s^{1+1}} = \frac{1}{s^2}$$

n = 2, 3, 4…. 등과 같이 정수에 나머지 정수 항에 대해서는 독자들이 직접 확인 해 보기 바란다.

3.2 라플라스 변환의 기본적인 성질

라플라스 변환은 기본적으로 적분식이기 때문에 적분에서 설명했던 기본적인 성질들이 그대로 적용될 수 있다.

$$£\{f(t)\} = F(s)$$
$$£\{g(t)\} = G(s) \text{ 라고 하면}$$

$$£\{kf(t)\} = kF(s) \Rightarrow (k : \text{constant})$$
$$£\{f(t) \pm g(t)\} = F(s) \pm G(s)$$

3.3 지수함수 및 삼각함수의 변환기법

이제 전기 엔지니어들이 가장 많이 접하는 지수함수 및 삼각함수의 변환기법에 대하여 알아보도록 한다.

지수함수의 변환 법을 먼저 이해하고 위에서 설명한 기본 성질을 이용하면 삼각함수의 변환에 대해서 자연스럽게 이해될 것이다.

$$f(t) = e^{at}$$

$$£\{f(t)\} = £\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

위 지수함수의 변환 결과는 전기 엔지니어들에게 매우 많이 활용되기 때문에 반드시 기억하기 바라며 이를 바탕으로 아래와 같이 삼각함수의 변환도 쉽게 유도되며 이를 잘 이해하기 바란다.

$$f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$£\{e^{j\omega t}\} = £\{\cos \omega t + j \sin \omega t\}$$

$$= \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$£\{\cos \omega t + j \sin \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore £\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$£\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

그리고 아주 중요하고 유용하게 활용되는 라플라스 변환의 기본 성질 하나를 설명하도록 한다.

다음과 같이 어떤 함수에 지수함수 e^{at}가 곱해져 있는 경우를 살펴보자.

$$£\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt$$

$s - a = u$ 라 놓으면

$$\int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-ut} dt$$

$$= F(u) = F(s-a)$$

$$£\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \Rightarrow (\because £\{f(t)\} = F(s))$$

이는 변환 및 역 변환에 있어 매우 유용한 것이니 반드시 기억하기 바란다.

위에서 설명한 변환과정의 의미는 어떤 함수에 지수함수 e^{at}가 곱해져 있을 경우 곱해져 있지 않은 함수의 변환을 구한 후 변환에 포함된 s를 (s-a)로 바꾸기만 하면 된다는 의미이며 다음 예를 잘 살펴보기 바란다.

$$£\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore £\{e^{at} t\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$£\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore £\{e^{at} \cos \omega t\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

3.4 변환의 유일성과 존재성의 이해

무엇인가를 변환한다는 것은 대부분 수식적인 계산을 좀더 편리하게 하기 위함이 목적이며 그 대표적인 것이 지수와 로그의 변환이다.

2^2=4, $2^{1.5}$=2.824과 같이 쉽게 그 값을 계산할 수 있는 지수가 있는 반면, 만약 $2^{1.2}$의 경우를 생각해 보면 그리 쉽게 보이지는 않는다.

이를 계산하기 위해서는 다음과 같이 상용로그를 이용한다.

$$x = 2^{1.2}$$
$$\log_{10} x = \log_{10} 2^{1.2}$$
$$= 1.2 \log_{10} 2 = 1.2 \times 0.3010 = 0.3612$$

0.3612를 상용로그표에서 찾으면

2.2974가 됨을 알 수 있다.

$$\therefore 2^{1.2} = 2.2974$$

즉 아무리 복잡한 형태의 지수라고 하여도 로그라고 하는 변환기법을 적용하면 쉽게 그 값을 알 수 있게 되며 하나의 지수는 반드시 하나의 로그 값을 가지며 이를 유일성과 존재성의 원리하고 한다.

따라서 이를 바탕으로 상호 대응하는 값을 표를 만들어 쉽게 찾아볼 수 있도록 할 수 있으면 이렇게 어떤 복잡한 형태의 지수를 그에 해당하는 십진수의 값으로 변환해 놓은 것이 상용로그 표인 것이다.

이와 마찬가지 개념으로 어떤 함수에 대한 라플라스 변환 또한 반드시 하나의 결과만 존재한다고 하는 것이 바로 존재성과 유일성의 원리라는 것이며 상용로그 표와 마찬가지로 라플라스 변환 표 역시 잘 정리되어 있다.

즉, 로그의 성질을 이용하여 해당 지수의 로그 값을 구하고 이를 상용로그 표에서 이에 해당하는 값을 찾아내는 것이며 라플라스 변환도 동일하다.

참고로 전기공학에서 사용되는 함수로서 엔지니어들이 통상적으로 접하는 함수는 그리 복잡한 것이 아니기 때문에 이에 관련된 라플라스 변환 표도 잘 정리되어 있어 언제든지 활용할 수 있다.

하지만 중요한 것은 변환에 대한 기본적인 개념을 철저하게 파악하고 있어야만 표를 활용하더라도 정확하게 활용할 수 있음은 당연할 것이다.

3.5 미분과 적분형태의 변환

이번에는 임의의 함수에 대한 미분과 적분형태의 변환에 대하여 알아본다.

$$£\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$
$$£\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = G(s)$$ 라 하면

미분형태의 함수를 변환하는 경우

$$£\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$
$$= \left[f(t)e^{-st} \right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
$$= 0 - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$
$$\therefore £\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

적분형태의 함수를 변환하는 경우

$£\{\int_0^t f(\tau)d\tau\}$는 $\int_0^t f(\tau)d\tau = g(t)$라 가정

$$g(0) = \int_0^0 f(\tau)d\tau = \left[F(t)\right]_0^0 = F(0) - F(0) = 0$$

$$f(t) = g'(t) \Rightarrow £\{f(t)\} = £\{g'(t)\}$$
$$F(s) = sG(s) - g(0) = sG(s) \Rightarrow (\because g(0) = 0)$$
$$G(s) = \frac{F(s)}{s}$$
$$\therefore £\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$$

이와 같이 미분과 적분형태를 갖는 함수의 변환에도 앞에서 설명한 기본개념을 이해하고 있으면 어렵지 않게 그 결과를 알아낼 수 있게 된다.

또한 이렇게 라플라스 변환을 하게 될 경우 앞에서 여러 차례 언급한 바와 같이 초기조건이 자연스럽게 포함되고 있음을 주의 깊게 살펴보기 바란다.

즉, 앞에서 예를 들어 설명한 전기회로의 방정식들이 전압이나 전류의 미분과 적분형태를 포함하고 있기 때문에 여기에 위의 변환기법을 적용하며 초기조건이 포함되어 있기 때문에 역 변환을 통해 쉽게 해를 구할 수 있는 것이다.

이번에는 앞에서 구한 1차 도함수의 변환 기법을 적용하여 2차 이상의 도함수에 대한 변환을 알아보자.

$$£\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\} = \int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt$$

$$= \left[f'(t)e^{-st} \right]_0^\infty + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

$$= -f'(0) + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

$$= s\{sF(s) - f(0)\} - f'(0)$$

$$(\because \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(0) - f(0))$$

$$\therefore £\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

위에서 살펴본 바와 같이 도함수에 대한 라플라스 변환의 성질을 간단하게 요약하면, 함수를 시간에 대하여 미분 할 때마다 라플라스 변환영역에서는 원래 함수의 변환에 s를 곱해주고 시간영역의 초기값을 빼 주는 간단한 대수연산으로 바뀐다는 것이다.

이는 앞에서 설명한 라플라스 변환의 가장 중요한 특성으로써 시간영역의 복잡한 미분방정식을 라플라스 영역에서 간단한 대수연산으로 바꾸어 이를 조작한 후 이를 다시 역 변환 하여 구하고자 하는 시간영역의 응답을 찾아낼 수 있는 것이다.

따라서 고차 도함수의 경우에도 그 차수만큼 s를 제곱해서 곱하고 초기조건을 포함하는 것으로 간단하게 변환이 가능하지만 현업을 수행하는 엔지니어가 주로 2차 사용하는 도함수까지를 설명하는 것으로 한다.

또한 앞의 초기조건을 찾아내는 방법을 설명할 때 언급했듯이 라플라스 변환을 수행하기 위해서는 이와 같이 초기조건을 필요로 하기 때문에 초기조건을 찾아내는 방법에 대하여 반드시 숙지하고 있어야 함을 다시 한번 밝힌다.

참고로 한가지만 더 언급하자면 임의의 전기회로가 완성되면 외부의 교란에 대하여 어떤 응답을 가질 것인지를 확인하는 절차가 필요하게 된다.

이때 회로의 모든 초기조건을 “0”으로 하여 입력과 출력에 대한 라플라스 변환의 비를 전달함수라고 하는데 이 전달함수의 역 변환이 회로의 임펄스 응답이라는 부르는 것임을 알아두기 바란다.

이번에는 시간 함수인 t가 곱해져 있는 형태를 갖는 함수의 변환을 설명하며 각 기호의 의미는 앞의 식에서 설명한 것과 동일하다.

$$£\{tf(t)\} = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt \Rightarrow (\frac{\delta}{\delta s}\{f(t)e^{-st}\} = -tf(t)e^{-st})$$

$$= \int_0^\infty -\frac{\delta}{\delta s}\{f(t)e^{-st}\}dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$£\{\frac{f(t)}{t}\} \Rightarrow (\frac{f(t)}{t} = g(t)\text{라 놓음})$$

$$£\{f(t)\} = £\{tg(t)\} \Rightarrow F(s) = -\frac{dG(s)}{ds}$$

$$\therefore G(s) = \int_s^\infty F(s)ds \Rightarrow (\text{적분구간에 유의바람})$$

위의 기법은 매우 유용하며 다음과 같이 예를 들어 이해를 돕도록 한다.

$$£\{t\cos\omega t\} \Rightarrow f(t) = \cos\omega t$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+\omega^2}) = -\frac{(s^2+\omega^2)-2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$\therefore £\{t\cos\omega t\} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

이 이외에도 여러 가지의 변환 기법들이 있지만 상당히 복잡하기 때문에 상세한 사항은 공업수학 서적으로 미루며, 참고로 필자는 Erwin Kreyzik 교수의 Engineering Mathematics 제 4판으로 배웠고 지금도 가끔 참고하고 있다.

3.6 역 변환의 개념 및 방법

앞에서도 여러 차례 언급했듯이 라플라스 변환을 공부하는 것은 미분과 적분 및 곱과 나누기를 포함하고 있는 복잡한 시간함수를 라플라스 변환하여 이들을 간단하게 대수적으로 계산 (Algebraic Calculation)하기 위함이다.

그런데 실제로 우리가 얻고자 하는 것은 이 변환된 것이 아니라 변환영역에서 계산된 결과를 다시 시간영역으로 역 변환한 함수임을 잊지 말아야 한다.

즉, 라플라스 변환의 목적은 미분방정식을 간단한 대수 방정식처럼 계산하고 이를 다시 역 변환하여 미분방정식의 해를 구하는데 있는 것이다.

라플라스 역 변환의 정의는 다음과 같이 상당히 복잡해 보이는 복소수를 포함하는 복소 적분의 형태를 갖는다.

$$\pounds^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

단, c>R (R은 가장 큰 실수부)

그렇지만 사실은 이 역 변환의 정의식을 이용해서 역 변환을 하는 경우는 거의 사용되지 않고 앞으로 설명될 Heaviside의 부분분수 전개 법이 널리 사용된다.

그리고 위 정의식에 대한 내용도 Heaviside의 부분분수 전개 법을 설명하는 과정에서 간단하게 언급할 예정이며 나름대로 도움이 될 것으로 생각한다.

또한 앞에서도 언급했듯이 일반적으로 공학에서 많이 사용되는 함수들은 라플라스 변환 표가 잘 정리되어 제공되고 있기 때문에 일단 변환을 하여 대수적으로 계산한 결과를 표에서 찾으면 그에 대응하는 역 변환된 시간함수를 쉽게 찾을 수 있다.

하지만 중요한 것은 엔지니어들은 기본적인 함수에 대한 변환 및 역 변환을 자유자재로 할 수 있어야만 표를 보아도 그 의미를 이해할 수 있는 것이다.

이해를 돕는 의미에서 앞에서 설명한 방법을 다음과 같이 요약해 놓으니 다시 한번 숙지하기 바란다.

[시간함수의 형태 및 라플라스 변환 요약]

시간함수의 형태	라플라스 변환	비고
$f(t) = k$	$\dfrac{k}{s}$	k : Constant (상수)
$f(t) = t^n$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	n : Integer (정수)
$f(t) = \cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	
$f(t) = \sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$£\{f(t)\} = F(s)$
$tf(t)$	$-\dfrac{d}{ds}F(s)$	$£\{f(t)\} = F(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$	적분구간에 유의바람.
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	변환에 포함되는 초기 조건의 형태 숙지
$f''(t)$	$s\{F(s) - f(0)\} - f'(0)$ $= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$	
$\int_0^t f(t-\tau)g(t)d\tau$	$F(s)G(s)$	$£\{f(t)\} = F(s)$ $£\{g(t)\} = G(s)$

위 식에서 맨 나중에 나타난 변환의 형태를 합성적분 (Convolution Integral)의 변환이라 하는 것으로 이는 만약 라플라스 변환된 결과가 우리에게 익숙한 기본적인 2개 함수의 변환의 곱으로 표시될 수 있을 경우에 역 변환을 구하는데 아주 유용하게 활용되는 것임을 잘 알아두기 바란다.

이제는 앞에서 설명한 제반 내용을 바탕으로 주어진 변환함수를 역 변환해 가는 기본적이고 중요한 방법들을 설명하니 잘 숙지하기 바라며 각종 참고서적과 본 교재의 내용을 몇 번이고 반복하여 완전히 이해하고 넘어가야 한다.

3.7 역 변환의 예

앞에서 살펴본 기본적인 변환방법을 적용할 수 있는 몇 가지의 예들을 들어보도록 한다.

3.7.1 기본함수 형태의 역 변환

다음과 같은 라플라스 변환을 갖는 시간함수를 찾아내기 위해서는 이를 적당한 형태로 변경한다.

$$F(s) = \frac{a}{s^4}$$

$$= a\frac{3!}{s^{3+1}} \times \frac{1}{3!}$$

$$= \frac{a}{6} \times \frac{3!}{s^{3+1}}$$

$$= £\{\frac{a}{6}t^3\}$$

$$\therefore £^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{a}{6}t^3$$

$$F(s) = \frac{s}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$= \frac{s+a-a}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} - \frac{a}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} - \frac{a}{b}\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$\therefore £^{-1}\{F(s)\} = e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt$$

위의 예와 같이 어떤 변환된 함수가 주어지면 이를 간단한 수학적인 조작을 통해 우리에게 익숙한 기본적인 시간함수의 조합으로 변경할 수 있는지를 가장 먼저 살펴보아야 한다.

또한 주어진 변환함수에 대하여 미분과 적분을 실시하고 이들이 기본적인 시간 함수의 변환형태가 되는지를 살펴보도록 한다.

$$F(s) = \frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$= \omega \frac{d(s^2+\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$$

$$\int_s^\infty F(s^*)ds^* = \omega \int_s^\infty \frac{d(s^{*2}+\omega^2)}{(s^{*2}+\omega^2)^2}$$

$$= \omega \left[-\frac{1}{(s^{*2}+\omega^2)} \right]_s^\infty = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$$

$$£\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(s^*)ds^* = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$$

$$\therefore \frac{f(t)}{t} = \sin \omega t$$

$$f(t) = t \sin \omega t$$

라플라스 변환을 이용하여 미분방정식을 해결하는 가장 중요한 첫번째 사항은 미분과 적분의 많은 연습을 통해 변환된 함수의 형태를 보는 순간 가장 효과적인 역 변환 방법이 머리 속에 떠올라야 하는 수학적인 직관력이다.

3.7.2 미분형과 적분형의 역 변환

이번에는 시간함수의 미분형과 적분형으로 역 변환되는 형태에 대하여 알아보도록 하는데, 이는 전기엔지니어들에게 매우 유용한 기법으로 회로해석을 위한 미분방정식을 해결할 경우에 나타나는 라플라스 변환의 형태가 주로 라플라스 연산자인 s를 곱하거나 s로 나누는 항이 많이 포함되기 때문이다.

즉, 라플라스 변환된 함수에 이와 같은 s의 항이 포함되어 있으면 앞에서 설명한 미분이나 적분의 형태를 이용하는 것이 좋다.

참고로 s를 곱하는 것은 시간으로 미분 하는 것을, s로 나누는 것은 시간으로 적분하는 물리적 의미를 포함하고 있음을 알아두기 바란다.

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$$
$$=\frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$F(s)=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ 라 면

$$f(t)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t$$
$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{F(s)}{s}$$
$$£^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\}=\int_0^t f(\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t\frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau$$
$$£^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\}=\left[-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right]_0^t=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$
$$=\frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$
$$\frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{F(s)}{s}$$
$$£^{-1}\{\frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\}=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t(1-\cos\omega\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{\omega^2}\left[\tau-\frac{1}{\omega}\sin\omega\tau\right]_0^t=\frac{1}{\omega^2}(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t)$$
$$\therefore\ £^{-1}\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\}=\frac{1}{\omega^2}(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t)$$

앞의 과정은 상당히 기본적이면서 유용한 내용을 포함하고 있으니 여러 번 반복해서 읽어보고 써 보고 해서 반드시 소화하기 바란다.

이번에는 s가 곱해져 있는 경우, 즉 미분형태에 대한 예인데 이해만을 돕기 위한 것이므로 다음과 같이 이미 알고 있는 결과를 활용하도록 한다.

$$\frac{s}{s^2+\omega^2}$$
$$= s\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$f(t) = \frac{1}{\omega}\sin \omega t$$
$$sF(s) = f'(t) = (\frac{1}{\omega}\sin \omega t)'$$
$$= \cos \omega t$$

앞의 설명에서 잘 알 수 있는 바와 같이 기본적인 함수의 변환 및 역변환에 관한 형태에 익숙해 있으면 주어진 함수를 조작하는데 매우 편리함을 알 수 있다.

3.8 합성적분의 활용 (Convolution Integral)

합성적분이란 본래 두 함수의 곱에 대한 적분을 용이하게 하기 위해 고안된 것으로 배웠는데 표기와 정의는 다음과 같다. (이는 작성자의 생각이며 실제로는 이와 다를 수 있음을 밝힌다.)

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

적분범위는 위와 다를 수 있으면 위에서 사용한 범위는 라플라스 변환과 역변환에 활용되는 합성적분에 대한 범위임을 밝힌다.

기타 좀더 높은 수준의 합성적분에 대해서는 작성자도 그 정확한 개념을 이해하고 있지 못하며 다만 라플라스 변환에 적용되는 정도만을 아는 수준이다.

이 합성적분의 정의는 라플라스 변환에서 다음과 같이 응용된다.

즉, 변환된 s의 함수가 임의의 두 시간함수의 변환의 곱으로 표기될 수 있다면 이의 역변환 시간함수는 각각 역변환 된 두 시간함수의 합성적분이 된다는 것으로서 이를 식으로 설명하며 다음과 같다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

이 합성적분은 앞에서 설명한 미분과 적분을 이용하는 형태와 더불어 라플라스 변환에서 매우 활용가치가 높은 기법임을 알아두기 바란다.

그리고 합성적분에서 교환법칙의 성립에 대한 설명을 깜박했는데 교환법칙이 성립하는 것은 당연할 것으로 생각된다.

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

이제 결과를 알고 있는 앞에서 설명한 예제를 가지고 이를 확인해 본다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\}$$
$$= \frac{1}{\omega^2}(t - \frac{1}{\omega}\sin\ \omega t)$$

임을 합성적분을 통해 확인해 본다.

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} \Rightarrow F(S) = \frac{1}{s^2}, G(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = t \Rightarrow f(t) = t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\} = \frac{1}{\omega}\sin\ \omega t \Rightarrow g(t) = \frac{1}{\omega}\sin\ \omega t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$$

이제 앞에서 구해 놓은 두 시간함수에 대한 합성적분을 실시하면 되는데 사실 지금부터가 어려운 과정이다.

왜냐하면 합성적분을 하려면 미분과 적분에 대한 기본개념이 정확하게 파악되어 있어야 하기 때문이다.

또한 합성적분에 교환법칙이 성립하기 때문에 어떤 함수를 (t-τ)로 바꾸어 주는 것이 계산과정에서 편리한지에 대한 직관력이 요구되는데 이 또한 미분과 적분에 많은 연습이 되어 있어야만 가능하기 때문이다.

아무튼 세상에는 공짜가 없다고 (There is no free lunch in the world) 하듯 무엇인가를 잘 알기 위해서는 끊임없는 노력을 필요로 한다고 생각한다.

이제 앞의 합성적분에 부분적분 기법을 적용하여 풀어보도록 하며 본 과정을 연습을 통해 익히기를 권한다.

$$f(t) * g(t) = t * \frac{1}{\omega}\sin \omega t$$
$$= \frac{1}{\omega}\int_0^t t \sin \omega(t-\tau)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{\omega}\int_0^t t\{\frac{1}{\omega}\cos \omega(t-\tau)\}'\, d\tau$$
$$= \frac{1}{\omega^2}\int_0^t t\{\cos \omega(t-\tau)\}'\, d\tau$$
$$= \frac{1}{\omega^2}\left[t \cos \omega(t-\tau)\right]_0^t - \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \cos \omega(t-\tau) d\tau$$
$$= \frac{t}{\omega^2} + \frac{1}{\omega 3}\left[\sin \omega(t-\tau)\right]_0^t$$
$$= \frac{t}{\omega^2} - \frac{1}{\omega 3}\sin \omega t$$
$$= \frac{1}{\omega^2}(t - \frac{1}{\omega}\sin \omega t)$$

이상과 같이 결과가 일치됨을 확인하였으며, 결과적으로 이러한 기본적인 변환기법들에 대하여 알고 있으면 매우 편리하기 때문에 숙지하고 있으면 변환의 형태로부터 편리한 기법을 찾아내는 직관력이 생길 수 있다.

3.9 초기값 및 최종값 정리

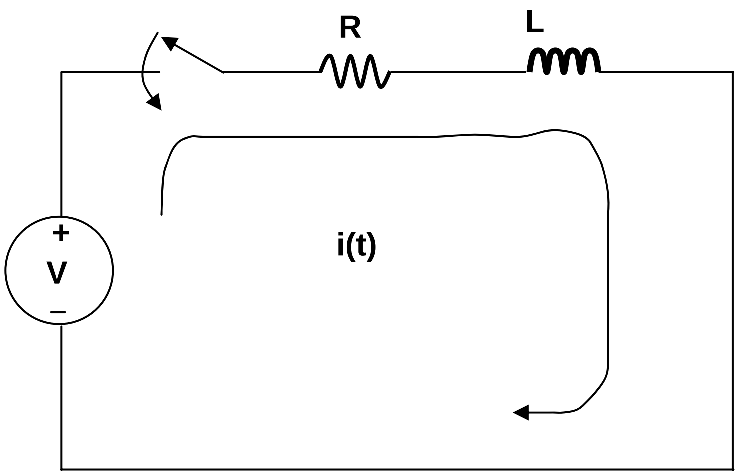
라플라스 변환에 대해서 개념을 설명하였기 때문에 시간함수가 변환된 형태를 이용하여 시간영역의 초기값과 최종값을 알아낼 수 있다.

앞에서 설명한 (2.2.2절 참조) 다음과 같은 직류 구동전원을 갖는 R-L 직렬회로에서 전류의 초기값 및 최종값은 직관적으로 간단하게 알 수가 있다.

즉, 스위치를 닫기 전 회로의 전류가 없었다면 초기값은 “0”이며 최종값은 구동전압을 회로의 저항으로 나눈 값인 “V/R”이 될 것이다.

회로의 인덕턴스는 직류전원을 인가하면 최종적으로 단락상태가 되기 때문이다.

이를 라플라스 변환의 형태를 이용하여 알아보도록 하는데, 우선 회로의 방정식을 수립하고 이를 라플라스 변환하여 전류에 대한 변환 식을 만들어야 한다.



[R-L 직렬회로의 회로방정식]

먼저 회로의 방정식은 다음과 같이 만들어 지며 이를 라플라스 변환하고 전류에 대한 변환 식을 도출한다.

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = V$$

$$\mathcal{L}(Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = \mathcal{L}(V)$$

$$RI(s) + LsI(s) = \frac{V}{s}$$

$$I(s) = \frac{V}{s(R+Ls)} = \frac{V}{L}\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

위와 같이 앞에서 배운 방법을 적용하여 간단하게 회로의 전류를 구했다.

미분방정식을 만들고 여기에 초기조건을 대입하고 미정계수를 구하는 상당히 복잡한 과정에 비하면 얼마나 간단한지 느낄 수 있을 것이다.

본론으로 돌아가서 초기값의 정리란 다음과 같이 정의된다.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$ **[초기값의 정리]**

위의 예에서 전류의 변환 식에 초기값의 정리를 적용하여 초기값을 알아보자.

$$i(0) = \lim_{s\to\infty} sI(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{V}{s(R+Ls)}$$

$$= \lim_{s\to\infty}\frac{V}{(R+Ls)} = 0$$

$$\therefore i(0) = 0$$

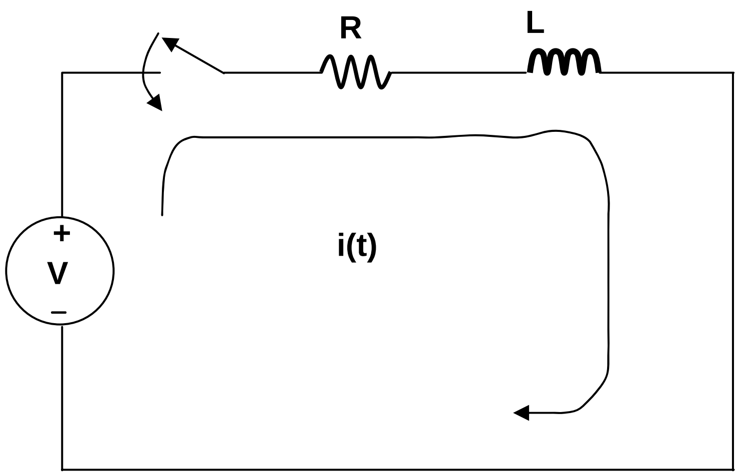
이와 같이 초기값의 정리로부터 변환된 식을 이용하여 쉽게 구할 수 있게 된다.

또한 최종값의 정리란 다음과 같이 정의되는데 최종값의 정리에는 최종값이 특정한 하나의 값으로 수렴되는 경우에만 성립한다는 조건이 있다.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$ **[최종값의 정리]**

이를 이용하여 회로전류의 최종값을 직접 구해보기 바란다.

사실은 이 초기값과 최종값 정리의 용도를 알고 활용하는 것이 중요한데 대표적으로 직류전원과 같이 최종값이 정의될 수 있는 “R-L” 및 “R-C” 회로의 동작 특성은 초기값과 최종값을 이용하여 다음과 같이 간단하게 표현된다.



[R-L 직렬회로의 회로방정식]

$$i(t) = i(\infty) - \{i(\infty) - i(0)\}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$= \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow (\because\ i(\infty) = \frac{V}{R}, i(0) = 0)$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

여기서 T는 회로의 시정수를 의미하며 “R-L” 및 “R-C” 회로에서 각각 다음의 값을 갖는다.

$$T = \frac{L}{R} \Rightarrow \text{R - L Circuit}$$
$$T = RC \Rightarrow \text{R - C Circuit}$$

[R-L & R-C 회로의 시정수]

본 정리를 독자들이 R-C 회로의 방정식을 세우고 라플라스 변환하여 직접 확인해 보기를 바란다.

3.10 부분분수 전개를 통한 역변환

라플라스 변환이라는 도구를 미분방정식의 풀이에 처음으로 접목한 사람은 영국의 전기 엔지니어인 Oliver Heaviside라는 사람이라고 한다.

그는 매우 실전적인 엔지니어였던 것으로 유명하며 1700년대 말에 라플라스가 남긴 저서의 내용을 바탕으로 1800년대 중반에 회로해석을 위한 미분방정식을 푸는데 활용했다고 하며 이를 Heaviside 연산자 법이라고 부르는데 여기서는 그 내용을 생략하기로 한다.

하지만 그의 이러한 응용법은 수학적인 증명을 하지는 못했던 것으로 알려져 있는데 이는 당시 엄격했던 수학자들로부터 비판의 대상이 되곤 했다 한다.

이러한 수학자들의 비판에 대하여 그가 한 유명한 말이 있는데 “당신들은 소화과정을 모른다고 해서 맛있는 만찬을 거부하는가?”라고 물었다고 한다.

이 얼마나 함축적인 촌철살인의 기지인가?

아마도 매우 멋진 엔지니어가 아니었을까 추측해 본다.

이후 많은 수학자들이 노력하여 Heaviside의 이론에 별로 큰 착오가 없었다는 것을 밝혀내고 지금의 라플라스 변환기법들을 정립하였다고 한다.

이제 그가 고안한 아주 유용한 도구인 라플라스 변환된 함수를 부분분수로 전개하여 미분방정식의 해를 찾아내는 과정을 설명하도록 한다.

먼저 부분분수 전개를 위해서는 변환된 함수의 분모를 s의 1차 식으로 구성되도록 인수분해를 하여야 하는데 이렇게 인수 분해된 1차 식은 각각 독립적인 것과 제곱항 이상을 포함하는 것으로 나뉘는데 각각에 대하여 설명한다.

3.10.1 각각 독립적인 항으로 인수분해 되는 경우

각각 독립적인 항으로 인수 분해되는 경우란 다음과 같은 형태를 의미한다.

$$F(s)=\frac{3s^2+12s+11}{s^3+6s^2+6s+11}$$
$$=\frac{3s^2+12s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$
$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$
$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s^2+12s+11}{s^3+6s^2+6s+11}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)$$
$$=e^{-t}+e^{-2t}+e^{-3t}$$

이와 같이 독립된 1차 식의 항으로 인수분해를 할 수만 있다면 이를 부분분수로 전개하여 간단하게 시간영역의 응답을 구할 수 있는 매우 편리하고 강력한 도구가 된다.

이제 변환을 마친 다음의 문제는 전기기술자들의 인수분해 능력만 뛰어나면 곧바로 이를 다음에 설명하는 부분분수 전개를 활용하여 미분방정식의 해를 구할 수 있게 된다.

라플라스 변환된 s의 함수가 다음과 같이 인수분해 되어 부분분수로 전개되었다고 할 경우에 분자인 K_n들의 값을 구하는 방법을 설명한다.

$$F(s)=\frac{H(s)}{G(s)}=\frac{H(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\bullet\bullet\bullet(s-\lambda_n)}$$
$$=\frac{K_1}{s-\lambda_1}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\bullet\bullet\bullet+\frac{K_n}{s-\lambda_n}$$

먼저 K_1의 값을 구하기 위해서는 양변에 $(s-\lambda_1)$을 곱해주고 s의 자리에 λ_1을 대입하면 된다.

$$K_1=\left[\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)\bullet\bullet\bullet(s-\lambda_n)}\right]_{s=\lambda_1}$$

이는 다음의 사유에서 비롯된다.

$$F(s)=\frac{H(s)}{G(s)}=\frac{H(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\bullet\bullet\bullet(s-\lambda_n)}$$

$$=\frac{K_1}{s-\lambda_1}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\bullet\bullet\bullet+\frac{K_n}{s-\lambda_n}\Rightarrow(\text{양변에 }(s-\lambda_1)\text{ 을 곱함})$$

$$\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)\bullet\bullet\bullet(s-\lambda_n)}=K_1+\frac{K_2(s-\lambda_1)}{s-\lambda_2}+\frac{K_3(s-\lambda_1)}{s-\lambda_3}+\bullet\bullet\bullet+\frac{K_n(s-\lambda_1)}{s-\lambda_n}$$

윗식의 양변의s 자리에 λ_1 을 대입함

$$\frac{H(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\bullet\bullet\bullet(\lambda_1-\lambda_n)}=K_1$$

$$\therefore K_1=\left[\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)\bullet\bullet\bullet(s-\lambda_n)}\right]_{s=\lambda_1}$$

이와 같은 방법으로 K_2. K_3, •••, K_n의 값을 차례로 구해나가면 되는데 이해를 돕기 위해 결과를 알고 있는 앞의 예를 사용해 본다.

$$F(s)=\frac{3s^2+12s+11}{s^3+6s^2+6s+11}=\frac{3s^2+12s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}$$

$$K_1=\left[\frac{3s^2+12s+11}{(s+2)(s+3)}\right]_{s=-1}=\frac{3-12+11}{1\times 2}=\frac{2}{2}=1$$

$$K_2=\left[\frac{3s^2+12s+11}{(s+1)(s+3)}\right]_{s=-2}=\frac{12-24+11}{-1\times 1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$K_3=\left[\frac{3s^2+12s+11}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-3}=\frac{27-36+11}{-1\times -2}=\frac{2}{2}=1$$

이와 같이 앞의 결과와 일치함을 알 수 있으며 일단 독립된 1차 식의 항으로 인수분해 되기만 하면 설명된 부분분수 전개법을 통해 간단하게 미분방정식의 해를 구할 수 있게 되는 것이다.

3.10.2 제곱항의 형태를 갖는 인수를 포함하는 경우

라플라스 변환된 모든 식이 앞에서 설명한 1차 식의 항으로 인수분해 될 수 있다면 미분방정식의 풀이가 얼마나 수월할 것인가!

하지만 세상일이 어찌 우리의 생각대로 되겠는가?

해서 여기에도 우리를 약간 괴롭히는 형태를 갖는 변환함수가 존재하는 것은 어쩌면 당연할 것이며 지금부터 설명하는 부분은 약간 어려울 수 있으니 이해하기 어려우면 그냥 넘어가도 좋지만, 엔지니어들은 알아 놓는 것이 좋다.

다음과 같이 제곱항의 형태를 가지도록 인수분해 될 경우 부분분수 전개와 분자를 구하는 과정에 대하여 설명하도록 한다.

$$F(s)=\frac{H(s)}{G(s)}=\frac{H(s)}{(s-\lambda_1)^n(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}$$

$$=\frac{K_{1a}}{s-\lambda_1}+\frac{K_{1b}}{(s-\lambda_1)^2}+\bullet\bullet\bullet+\frac{K_{1n}}{(s-\lambda_1)^n}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\frac{K_3}{s-\lambda_3}$$

양변에 $(s-\lambda_1)^n$ 을 곱함

$$\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}$$

$$=K_{1a}(s-\lambda_1)^{n-1}+K_{1b}(s-\lambda_1)^{n-2}+\bullet\bullet\bullet+K_{1n}+\frac{K_2(s-\lambda_1)^n}{s-\lambda_2}+\frac{K_3(s-\lambda_1)^n}{s-\lambda_3}$$

양변의 s 자리에 λ_1 을 대입하여 K_{1n}을 구함

$$K_{1n}=\left[\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right]_{s=\lambda_1}$$

여기까지는 수월하나 다음부터가 약간 어려운 과정이지만 잘 읽어보면 그것도 아닌 것을 금방 느낄 수 있을 것이다.

다음과 같이 부분분수로 전개한 항의 거듭제곱항이 포함된 부분을 좀더 자세히 나열해 보도록 한다.

$$\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)} = K_{1a}(s-\lambda_1)^{n-1} + K_{1b}(s-\lambda_1)^{n-2} + K_{1c}(s-\lambda_1)^{n-3} + K_{1d}(s-\lambda_1)^{n-4}$$

$$\bullet\bullet\bullet + K_{1m}(s-\lambda_1) + K_{1n} + K_2\frac{(s-\lambda_1)^n}{s-\lambda_2} + K_3\frac{(s-\lambda_1)^n}{s-\lambda_3}$$

K_{1m}을구하기위해서는양변을s로미분하고s자리에λ_1을대입함

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right]_{s=\lambda_1} = K_{1a}(n-1)(s-\lambda_1)^{n-2} + K_{1b}(n-2)(s-\lambda_1)^{n-3}$$

$$\bullet\bullet\bullet + K_{1m} + K_2\frac{n(s-\lambda_1)^{n-1}(s-\lambda_2)-(s-\lambda_1)^n}{(s-\lambda_2)^2} + K_3\frac{n(s-\lambda_1)^{n-1}(s-\lambda_3)-(s-\lambda_1)^n}{(s-\lambda_3)^2}$$

우변은K_{1m} 이외에는전부0이되므로

$$K_{1m} = \frac{d}{ds}\left[\frac{H(s)}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right]_{s=\lambda_1}$$

이와 같이 거듭제곱의 차수보다 하나 적은 수만큼 미분을 계속하면 원하는 계수를 무리 없이 구할 수 있으며 이때 주의할 것은 미분을 한번씩 해 나갈 때마다 K_{1n}들의 앞에 (n-1)X(n-2)와 같은 미분할 때 나타나는 계수들을 고려하여야 한다는 것이다.

K_{1l}, K_{1k}들은 독자들이 숙지하는 것으로 하여 직접 계산해 보기 바란다.

K_2와 K_3는 독립된 1차 식의 인수이므로 앞에서 설명한 방법을 적용하면 되며 이렇게 과정을 이해하면 남은 문제는 실수 없이 계산하는 것인데 이는 연습만이 지름길이라는 것은 재론의 여지가 없을 것으로 생각한다.

한가지 덧붙이면 사실 전기회로를 설계하거나 분석할 때 거듭제곱의 차수가 보통 3차를 넘지 않으므로 그렇게 많은 회수의 미분을 행할 일은 없다고 보면 되는데 이는 회로의 응답을 알아내기 위한 방정식의 라플라스 변환된 s함수의 분모의 차수가 너무 높으면 그 회로의 안정도에 영향을 미치기 때문이다.

이는 자동제어 이론에서 가장 기본적으로 알고 있어야 하는 사항이며 분모와 분자의 차수가 2를 초과하면 회로의 응답이 불안정한 영역으로 움직일 수 있기 때문이다.

이에 대한 사항은 자동제어 이론을 다룬 전문서적에 잘 나와 있으며 전기회로 응답특성의 안정여부를 판단하는 기법으로는 나이퀴스트 판정법, 근궤적법, R-H 법이 대표적이지만 본 교재의 작성목적과는 다르므로 상세한 설명은 생략한다.

이제 앞의 기법을 활용하기 위한 예제를 몇 가지 풀어보도록 하는데 먼저 다음과 같이 부분분수 전개방법을 적용하기 앞서 약간의 조작을 통해 간단하게 할 수 있는 예부터 들어본다.

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$$
$$= \frac{(s+1)-2}{(s+1)^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^2}$$
$$= \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-1}{(s+1)^2}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}\}$$
$$= e^{-t} - 2te^{-t} = e^{-t}(1-2t)$$

위 예제의 목적은 부분분수 전개기법이나 다른 방법을 적용하여 역변환을 하기 전에 간단한 대수조작을 통해서 이미 알고 있는 기본적인 역변환의 형태로 바꿀 수 있는지를 먼저 살펴보는 습관을 기르도록 하기 위함이다.

즉. 굳이 어렵고 복잡한 풀이과정을 가지지 않고 간단한 조작으로 수월하게 원하는 결과를 얻을 수 있는 경우가 많으며 이러한 조작기법들을 평소에 연습을 통해 익혀 놓으면 많은 도움을 받을 수 있다는 것이 수학이라고 하는 분야의 매력이자 재미의 근원이라고 생각한다.

이번에는 다음과 같이 거듭제곱과 1차 식이 혼합된 예제를 보자.

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = K_{11}\frac{s+3}{s+1} + K_{12}\frac{s+3}{(s+1)^2} + K_2$$

$$K_2 = \frac{-3+2}{(-3+1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{s+2}{(s+3)} = K_{11}(s+1) + K_{12} + K_2\frac{(s+1)^2}{s+3}$$

$$K_{12} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{ds}\{\frac{s+2}{(s+3)}\} = K_{11} + K_2\frac{d}{ds}\{\frac{(s+1)^2}{s+3}\}$$

$$\frac{1}{(s+3)^2} = K_{11} + K_2\frac{2(s+1)(s+3)-(s+1)^2}{(s+3)^2}$$

$$K_{11} = \frac{1}{(-1+3)^2} = \frac{1}{4}$$

$$F(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{s+3}$$

$$\therefore\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{s+3}\}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} = \frac{1}{4}e^{-t}(1+2t) - \frac{1}{4}e^{-3t}$$

이러한 부분분수를 통한 계산과정은 상당히 복잡하기 때문에 약간의 착오로 다른 결과를 도출할 수 있는데 수작업으로 계산할 경우 많은 주의를 요하기 때문에 결국 왕도는 꾸준한 반복 연습이 될 것이다.

이번에는 다음과 같이 복소수를 포함하는 예제를 살펴본다.

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

$$= \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s + 2 - j)(s + 2 + j)}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s(s + 2 - j)} + \frac{K_3}{s + 2 + j}$$

$$\left[\frac{s^2 + 6s + 5}{(s + 2 - j)(s + 2 + j)} \right]_{s=0} = K_1$$

$$\therefore K_1 = \frac{5}{(2 - j)(2 + j)} = 1$$

$$K_2 = \left[\frac{s^2 + 6s + 5}{s(s + 2 + j)} \right]_{s=-2+j} = \frac{(-2 + j)^2 + 6(-2 + j) + 5}{(-2 + j)2j}$$

$$= \frac{2(-2 + j)}{(-2 + j)2j} = \frac{1}{j} = -j$$

$$K_2 = \left[\frac{s^2 + 6s + 5}{s(s + 2 - j)} \right]_{s=-2-j} = \frac{(-2 - j)^2 + 6(-2 - j) + 5}{-2j(-2 - j)}$$

$$= \frac{2(-2 - j)}{-2j(-2 - j)} = -\frac{1}{j} = j$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s^2 + 4s + 5)} = \frac{1}{s} - \frac{j}{s(s + 2 - j)} + \frac{j}{s + 2 + j}$$

$$\therefore\ f(t) = 1 - je^{(-2+j)t} + je^{(-2-j)t} = 1 - je^{-2t}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$= 1 + 2e^{-2t} \times \frac{e^{jt} - e -^{jt}}{2j}$$

$$= 1 + 2e^{-2t} \sin t$$

바로 앞의 예제의 풀이과정에서 매 나중에 나온 지수함수를 사인함수로 변환하는 것은 오일러의 식이라는 것으로 다음과 같다.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \rightarrow (1)$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \rightarrow (2)$$

$$(1) + (2)$$
$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$$

$$(1) - (2)$$
$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

앞의 식은 삼각함수를 항상 접하는 전기기술자들이 반드시 기억하고 활용하여야 하는 식이며 필자가 작성해 놓은 “삼각함수의 이해”에도 잘 설명되어 있으니 참고하기 바란다.

이상에서 설명한 바와 같이 기본적인 사항들에 대하여 그 개념을 정확하게 파악하고 있으면 아무리 복잡한 문제가 하더라도 기초 개념들을 조립해 나가다 보면 그리 어려운 일도 아니라는 것을 느끼게 될 것으로 확신하는 바이다.

독자들은 본 자료를 참고하여 다른 많은 예제들을 접해보기 바라며 라플라스 변환과정에 대한 응용기법의 설명은 마치기로 한다.

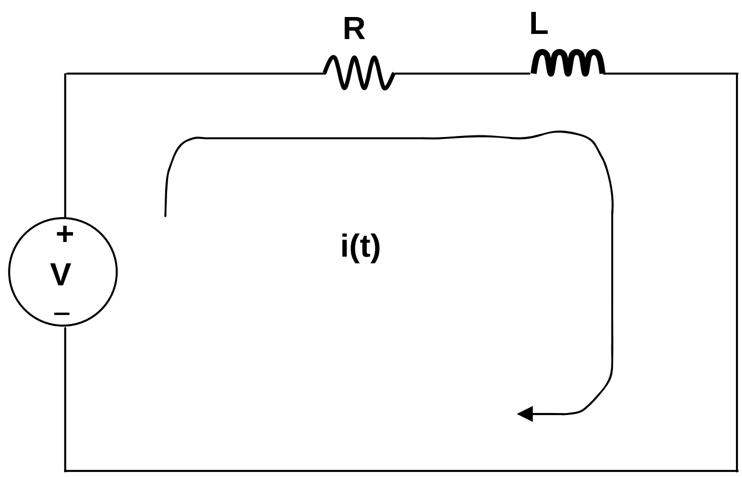
3.11 구동전원의 라플라스 변환

전기회로를 해석하기 위한 방정식을 다루다 보면 회로에서 수립되는 부분에 대한 변환은 간단하지만 강제전원의 형태가 다양하기 때문에 이를 변환하는 것에 매우 어려움을 느끼는 경우가 많다.

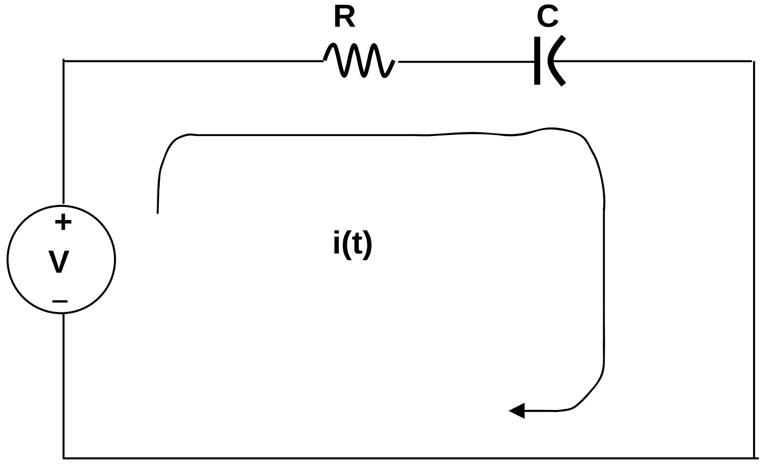
여기서는 간략하게 설명하고 상세한 사항은 관련서적의 몫으로 남겨둔다.

전기회로를 수학적으로 모델링 하여 얻어지는 미분방정식은 1차 또는 2차 방정식이 보통이다.

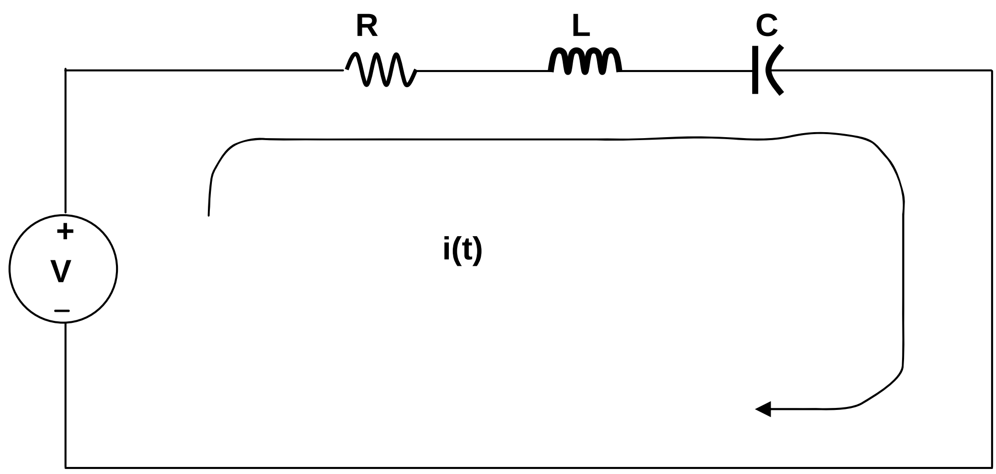
왜냐하면 복잡한 전기회로라 하더라도 몇 번의 과정을 거치면 다음과 같이 결국 **“R-L, R-C, R-L-C”** 회로로 간략화 할 수 있기 때문이다.



[R-L 직렬회로]



[R- C 직렬회로]



[R-L-C 직렬회로]

이 회로의 미분방정식은 앞에서 설명했듯이 다음과 같이 수립된다.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \Rightarrow \textbf{[R - L Circuit]}$$

$$Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = V \Rightarrow \textbf{[R - C Circuit]}$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = V \Rightarrow \textbf{[R - L - C Circuit]}$$

이 회로방정식을 풀기 위해서는 앞에서 배운 라플라스 변환을 이용할 수 있는데 각 방정식의 좌변을 변환하는 것은 매우 간단하다.

즉, 좌변은 미분과 적분형태의 변환에 필요한 기본적인 지식과 각 회로의 초기상태를 바탕으로 초기조건을 알아내는 방법을 알고 있으면 충분하다.

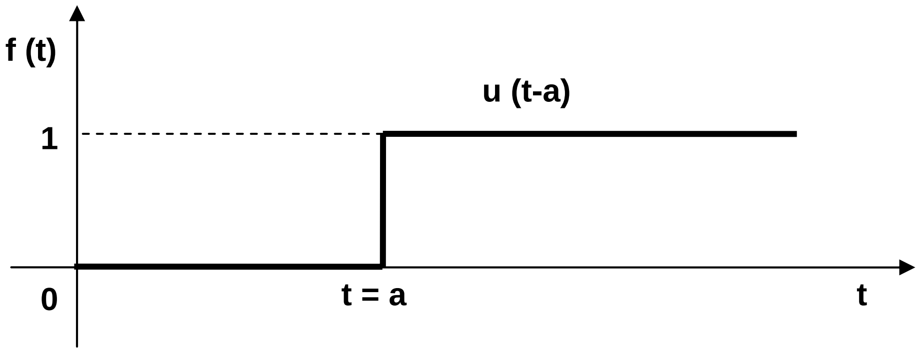
그런데 우변의 강제함수의 형태가 직류전원 또는 사인이나 코사인 형태의 단일파형을 갖는 교류전원이면 간단하게 될 것이다.

따라서 직류전원이나 교류전원이 아니면서 전기회로의 구동전원이 될 수 있는 대표적인 형태를 알아보도록 한다.

3.11.1 단위계단 함수형태

시간이나 거리와 같은 일정한 크기를 변수로 하는 함수를 활용할 때 그 기준점을 출발점으로 하는 것이 보통이며 이를 **"0"**으로 처리한다.

그런데 다음과 같이 임의의 시간까지는 **"0"**의 값을 유지하다가 갑자기 **"1"**이라는 단위 값을 갖는 형태를 단위 계단함수라고 **(Unit Step Function)** 하며 전기공학에서는 매우 중요한 의미를 갖는 함수이다.



[단위계단 함수**]**

이 함수를 라플라스 변환하면 어떻게 되는지 알아본다.

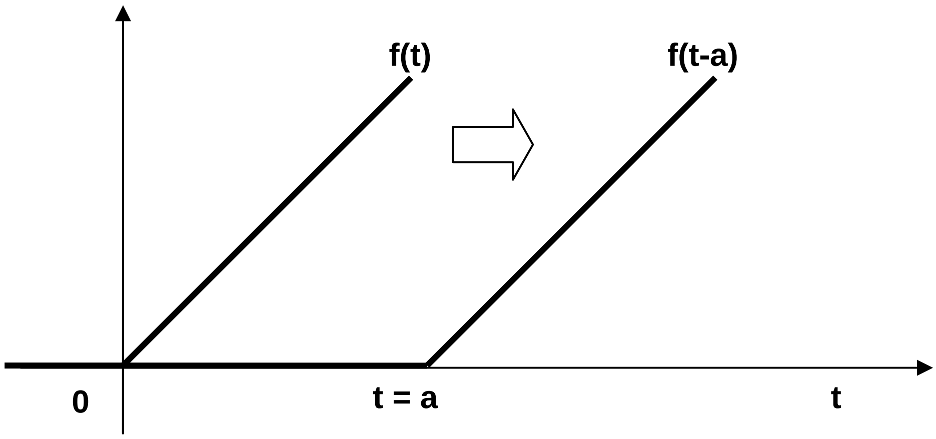
$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^a 0\times e^{-st}\,dt + \int_a^\infty 1\times e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_a^\infty$$

$$= \frac{1}{s}e^{-as}$$

단위계단 함수의 변환에는 매우 중요한 의미가 포함되어 있는데 다음의 설명을 잘 이해할 수 있도록 한다.

다음과 같은 시간함수를 t = a까지 평행이동 시켰다고 하면 원래의 함수 f(t)를 이동후의 함수 **f(t-a) x u(t-a)**로 표기할 수 있을 것이므로 이동후의 함수를 라플라스 변환을 구해보도록 한다.



[함수의 평행이동]

$$\mathcal{L}\{ f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt$$

여기서 $t - a = t'$ 라고 놓으면

$$\int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t')u(t')e^{-s(t'+a)}dt'$$

$$= \int_0^\infty f(t')u(t')e^{-st'}e^{-as}dt'$$

$$= e^{-as}F(s)$$

이 결과는 매우 중요하며 어떤 변환함수에 $\mathbf{e^{-as}}$가 곱해져 있으면 그 역변환 시간함수는 시간 축으로 a만큼 이동하고 여기에 단위계단 함수를 곱한 것이라는 의미이다.

즉 다음과 같은 의미이다.

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\} = \sin\,\omega t$$

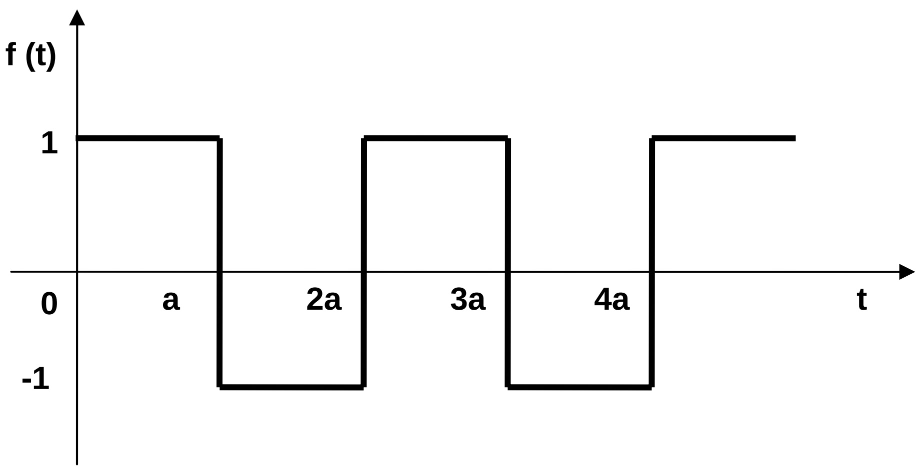
$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\} = \sin\,\omega(t-a)\times u(t-a)$$

이 성질은 전기기술자들이 회로해석을 위한 방정식을 다룰 때 늘 대하는 것이면 아주 요긴하게 써먹을 수 있는 것이니 잘 이해하기 바란다.

3.11.2 주기함수 형태

주기함수 형태의 구동전원을 갖는 회로들을 전기기술자들은 자주 접하게 되는데 특히 현장의 계장설비를 담당하는 엔지니어들은 더욱 그렇다.

예를 들어 톱니바퀴의 속도측정계기는 자속을 발생시키는 코일과 톱니바퀴 이빨 사이의 자기저항 차이로 인한 발생전압을 감지하는 Pickup 코일로 구성되어 있는데 이의 출력이 다음과 같은 구형파 (Square Wave)의 주기함수이다.



[구형파 주기함수**]**

즉 이런 파형을 받아들여 분석을 하기 위한 회로는 이 발생전압을 구동전원으로 하여야 하기 때문에 이를 포함하고 있는 미분방정식을 풀기 위해서는 본 주기파형에 대한 라플라스 변환기법을 아는 것이 중요하게 된다.

앞의 주기를 잘 보면 시간적으로 매 2a마다 반복됨을 알 수 있으며 마치 사인 형태와 같이 반주기 동안은 +1을 나머지 반주기 동안은 -1을 유지한다.

이를 토대로 상기 함수를 분해하면 다음과 같이 각각의 함수가 합성된 것임을 알 수 있을 것이다.

$$f(t) = u(t) - 2u(t-a) + 2u(t-2a) - 2u(t-3a) + \bullet\bullet\bullet$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + \frac{2}{s}e^{-2as} - \frac{2}{s}e^{-3as} + \bullet\bullet\bullet$$

$$= \frac{1}{s}(1 - 2(e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} - \bullet\bullet\bullet))$$

$$= \frac{1}{s}(1 - \frac{2e^{-as}}{1+e^{-as}}) \Rightarrow (\because e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} - \bullet\bullet\bullet = \frac{e^{-as}}{1+e^{-as}})$$

$$= \frac{1}{s} \times \frac{1+e^{-as} - 2e^{-as}}{1+e^{-as}} = \frac{1}{s} \times \frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}$$

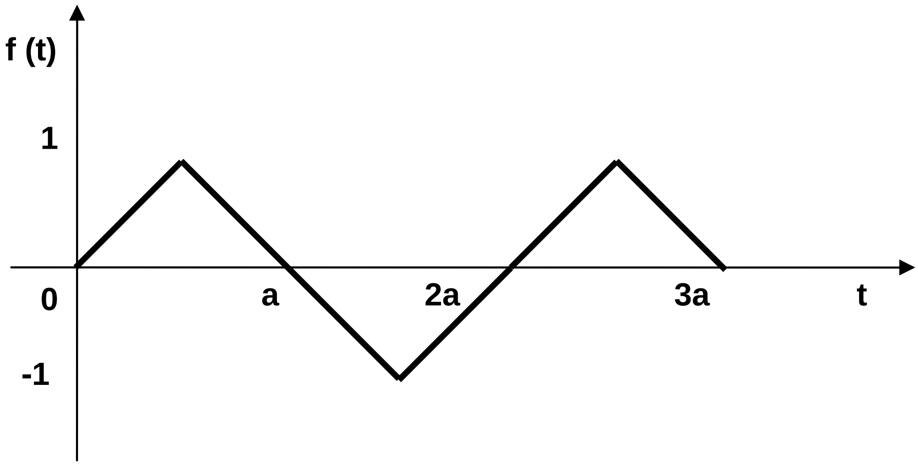
$$= \frac{1}{s} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}as}(e^{\frac{1}{2}as} - e^{-\frac{1}{2}as})}{e^{-\frac{1}{2}as}(e^{\frac{1}{2}as} + e^{-\frac{1}{2}as})} = \frac{1}{s} \times \frac{e^{\frac{1}{2}as} - e^{-\frac{1}{2}as}}{e^{\frac{1}{2}as} + e^{-\frac{1}{2}as}}$$

$$= \frac{1}{s} \times \frac{\dfrac{e^{\frac{1}{2}as} - e^{-\frac{1}{2}as}}{2}}{\dfrac{e^{\frac{1}{2}as} + e^{-\frac{1}{2}as}}{2}} = \frac{1}{s} \times \frac{\sinh \dfrac{as}{2}}{\cosh \dfrac{as}{2}}$$

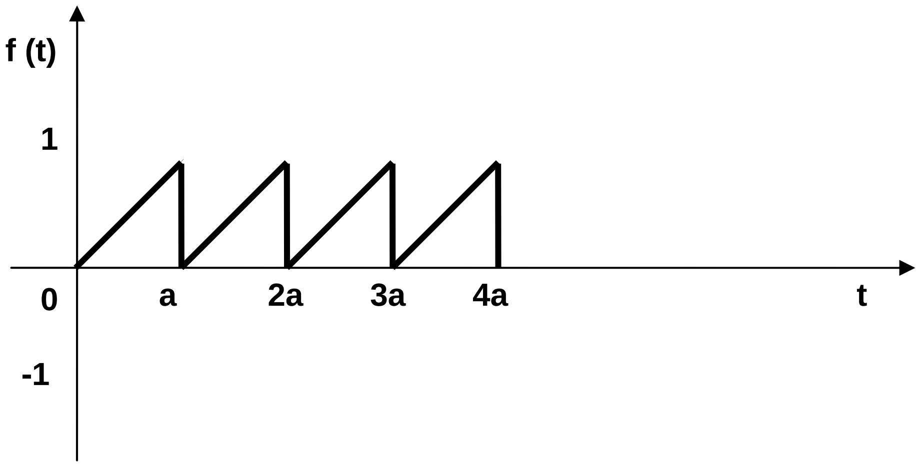
$$= \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2}$$

상기 주기함수의 변환결과는 라플라스 변환을 다루고 있는 거의 모든 회로이론 서적이나 공업수학 서적에 빠짐없이 등장하는 것으로써 그만큼 전기공학에서는 유용한 것을 의미하는 것이다.

앞의 구형파를 포함하여 다음과 같은 톱니파, 반톱니파와 같은 주기함수 형태의 구동전원이 많이 있지만 여기서 모두 다루는 것은 어렵기 때문에 생략한다.



[톱니파 주기함수**]**



[반톱니파 주기함수**]**

하지만 이러한 형태의 주기파형은 현업에서 자주 접하고 있기 때문에 이러한 회로를 다루는 엔지니어들한테는 꼭 알고 있어야 하는 사항이다.

예를 들어 요즈음 전력전자공학의 발달에 힘입어 산업현장에 폭넓게 도입되고 있는 인버터와 무정전전원장치는 (UPS) 구형파가 출력전압의 기본파형이기 때문에 앞으로 더욱 요긴하게 사용될 수 있을 것으로 생각한다.

또한 이러한 주기함수의 경우 이들을 Fourier 정리를 이용하여 무한급수 전개하면 각각의 독립된 주파수를 갖는 사인함수와 코사인함수의 합성형태로 분해할 수 있는데 이렇게 분해된 각각의 함수들에 대한 응답을 중첩하는 방법으로도 해결이 가능하다.

가급적이면 경험을 바탕으로 쉽게 이해할 수 있는 교재를 만들려고 노력하였으나 늘 그러하듯이 마치고 나서 처음부터 살펴보면 왜 그리 부족한 부분이 많은지 모를 일이지만, 한 가지라도 도움이 된다면 무척 보람된 일이라고 생각한다.

우리가 싫던 좋던 엔지니어의 길을 직업으로 택한 사람은 끊임없이 노력하고 경험한 사항을 정리해서 자료로 남겨야 하는 것이 어쩔 수 없는 운명이라 생각하여 본 교재를 작성했음을 밝힌다. **[끝]**